



И.Е. КАЗАКОВ
В.М. АРТЕМЬЕВ
В.А. БУХАЛЕВ

АНАЛИЗ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ



И. Е. ГАЗАКОВ, В. М. АРТЕМЬЕВ, В. А. БУХАЛЕВ

АНАЛИЗ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ



МОСКВА

ПЕЧАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»

ВО «НАУКА»

1992

ББК 32.81
К14
УДК 681.5

Серия «Теоретические основы
технической кибернетики» издаётся с 1965 года

Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А. **Анализ систем случайной структуры.** — М.: Физматлит, 1993. — 272 с. — (Теор. основы техн. кибернетики). — ISBN 5-02-014595-5.

Систематически излагаются задачи вероятностного анализа систем со случайной сменой структуры в пространстве состояний. Общей основой анализа является теория марковских процессов и последовательностей. Смена структуры системы в процессе ее функционирования интерпретируется как дискретный марковский процесс с конечным числом состояний. Рассматриваются задачи анализа систем с возможными нарушениями, перерывами информации, переменной структурой управления, в режиме разделения времени управления, со случайным периодом квантования.

Для студентов и аспирантов, а также для специалистов в области кибернетики и информатики.

Табл. 2. Ил. 75. Библиогр. 78 назв.

Рецензент

доктор технических наук *Б. Г. Доступов*

Научное издание

КАЗАКОВ Игорь Ефимович

АРТЕМЬЕВ Валентин Михайлович

БУХАЛЕВ Вадим Алексеевич

АНАЛИЗ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Серия «Теоретические основы технической кибернетики», вып. 93

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*

Редактор *Ю. Г. Гуревич*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *И. Ш. Ансельрод*

Корректоры *О. А. Витусова, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 41242

Сдано в набор 08.01.92. Подписано к печати 14.07.93. Формат 60 × 90/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17. Усл. кр.-отт. 17. Уч.-изд. л. 19,35. Тираж 3000 экз. Заказ № 30. С — 052.

Издательская фирма «Физико-математическая литература ВО «Наука» 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Новосибирская типография ВО «Наука»
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25

К 1402060000—052
053(02)-93 Без объявл.

ISBN 5-02-014595-5

©И. Е. Казаков, В. М. Артемьев, В. А. Бухалев, 1993

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Математические модели систем со случайной структурой	10
§ 1.1. Системы со случайной структурой	10
§ 1.2. Стохастические уравнения систем	13
§ 1.3. Классификация систем	16
§ 1.4. Задачи и методы анализа	17
Глава 2. Стохастические процессы в системах со случайной структурой	20
§ 2.1. Эволюция вектора состояния системы как марковский процесс	20
§ 2.2. Марковский разрывный стохастический процесс	25
§ 2.3. Марковская разрывная стохастическая последовательность	29
§ 2.4. Локальные характеристики марковских разрывных процессов	30
§ 2.5. Дискретный марковский процесс смены структуры	34
§ 2.6. Дискретный условный марковский процесс смены структуры с распределенными переходами	38
§ 2.7. Дискретный условный марковский процесс смены структуры с сосредоточенными переходами	40
Глава 3. Уравнения для вероятностных характеристик в системах со случайной структурой	42
§ 3.1. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для многомерного марковского процесса	42
§ 3.2. Уравнение Пугачева для многомерного марковского процесса	45
§ 3.3. Функции плотности вероятности разрывных процессов при распределенных переходах	46
§ 3.4. Функции плотности вероятности разрывных процессов при сосредоточенных переходах	52
§ 3.5. Функции поглощения и восстановления	57
§ 3.6. Обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова	62
§ 3.7. Обобщенные уравнения Пугачева	64
§ 3.8. Уравнения для вероятностей состояний	65
§ 3.9. Условные обобщенные уравнения для функций плотностей вероятностей	67
§ 3.10. Уравнения для вероятностных моментов	70
§ 3.11. Общие рекуррентные формулы для вероятностных характеристик дискретных систем	79
Глава 4. Приближенные методы анализа систем со случайной структурой	82
§ 4.1. Основы приближенных методов	82
§ 4.2. Двухмоментная параметрическая аппроксимация плотностей вероятностей	84

§ 4.3.	Системы с условной марковской структурой	88
§ 4.4.	Непрерывные системы с марковской структурой	91
§ 4.5.	Дискретные системы	96
§ 4.6.	Дискретные системы с аддитивно-мультипликативными возмущениями	100
	4.6.1. Нелинейная система с условной марковской структурой (100). 4.6.2. Линейная система с условной марковской структурой (101). 4.6.3. Линейная система с марковской структурой (102).	
§ 4.7.	Устойчивость непрерывных систем	104
§ 4.8.	Устойчивость дискретных систем	107
§ 4.9.	Выбор и преобразование множества состояний структуры	108
§ 4.10.	Способы определения интенсивностей переходов	113
Глава 5. Динамические системы в условиях марковских скачкообразных входных воздействий		119
§ 5.1.	Виды внешних марковских скачкообразных воздействий	119
§ 5.2.	Действие скачкообразного аддитивного белого шума на линейные системы	121
	5.2.1. Непрерывная система (121). 5.2.2. Дискретная система (123).	
§ 5.3.	Действие на линейные системы аддитивных марковских скачкообразных сигналов	125
	5.3.1. Непрерывная система (125). 5.3.2. Дискретная система (126). 5.3.3. «Симметричный» скачкообразный входной сигнал (129).	
§ 5.4.	Сглаживание случайного двоичного сигнала апериодическим звеном	131
	5.4.1. Закон распределения выходного сигнала (131). 5.4.2. Вероятности состояний структуры и моменты выходного сигнала (137).	
§ 5.5.	Сглаживание случайного двоичного сигнала дискретным инерционным фильтром	140
	5.5.1. Закон распределения выходного сигнала (140). 5.5.2. Вероятности состояний структуры и моменты выходного сигнала (141).	
Глава 6. Марковские системы с распределенной скачкообразной емной структурой		145
§ 6.1.	Мультиструктура марковских систем	145
§ 6.2.	Вероятности состояний в системах с отказами	146
§ 6.3.	Вероятностные характеристики фазовых координат в системах с отказами	149
§ 6.4.	Вероятности состояний в системах с нарушениями и восстановлением	153
§ 6.5.	Вероятностные характеристики фазовых координат в системах с нарушениями и восстановлением	155
§ 6.6.	Двухструктурная марковская система с переменными режимами управления	158
§ 6.7.	Комбинированная система самонаведения	162
Глава 7. Системы с условной марковской структурой		171
§ 7.1.	Статистическая зависимость структуры от фазовых координат	171
§ 7.2.	Закон распределения выходного сигнала нелинейной системы с условной марковской структурой	173
§ 7.3.	Сглаживание случайного двоичного сигнала нелинейным инерционным фильтром	175
	7.3.1. Интенсивности переходов состояний структуры (175). 7.3.2. Стационарное распределение выходного сигнала (178).	
§ 7.4.	Системы с немарковской структурой, заданной случайными интенсивностями переходов	184
Глава 8. Марковские системы с сосредоточенной скачкообразной емной структурой		192
§ 8.1.	Мультиструктура систем с сосредоточенными переходами	192
§ 8.2.	Двухструктурная система с сосредоточенными переходами	194
§ 8.3.	Вероятностный анализ двухструктурной системы	198
§ 8.4.	Системы с переменной структурой управления	205

§ 8.5. Вероятностный анализ систем с переменной структурой управления	208
§ 8.6. Статистическая линеаризация ψ -ячейки	212
§ 8.7. Система с одним звеном переменной структуры управления	216
§ 8.8. Система с $N - 1$ звеном переменной структуры управления	225
Глава 9. Управление системами с разделением времени	228
§ 9.1. Уравнение для плотности вероятности выходных координат	228
§ 9.2. Уравнения для вероятностных моментов	233
§ 9.3. Анализ влияния степени приоритета на качество управления	237
Глава 10. Системы со случайным периодом квантования	245
§ 10.1. Уравнения систем со случайным периодом квантования	245
§ 10.2. Уравнения Колмогорова — Феллера	247
§ 10.3. Уравнения для плотностей вероятности	254
§ 10.4. Уравнения вероятностных моментов систем с амплитудной модуляцией	260
§ 10.5. Уравнения систем с амплитудной модуляцией	263
§ 10.6. Уравнения вероятностных моментов систем с частотной модуляцией	265
Послесловие	267
Список литературы	268

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга относится к статистической динамике управляемых систем. Формирование этой теории началось в середине нашего столетия. Она продолжает развиваться и совершенствоваться, охватывая новые сложные объекты и процессы. Среди таких объектов важное значение приобретают системы со случайными скачкообразными изменениями параметров и структуры в процессе функционирования, связанными с влиянием внутренних факторов, присущих системе, или внешних, обусловленных воздействием среды.

Динамические системы, свойства которых скачкообразно изменяются в случайные моменты времени, называются *системами со случайными изменениями структуры* (ССС). Простейшими из них являются системы со скачкообразно изменяющимися параметрами. Задачи в таких объектах начали изучаться в 60-е годы в статистической динамике управляемых систем, а близкие к ним задачи о срыве слежения или достижения границ стохастическим процессом — в статистической радиотехнике.

Развитие статистической динамики систем со случайными изменениями структуры отражено в публикациях последних 20 лет. К ним, в частности, относятся монографии [4, 28, 30]. Эти работы отражают состояние аналитической теории систем со случайной структурой на определенных временных этапах. В настоящее время, в связи с дальнейшим развитием таких систем, возникла необходимость систематизированного рассмотрения трех разделов теории систем со случайной структурой: анализа, оценивания, оптимизации. Данная книга содержит изложение состояния современного анализа систем со случайными изменениями структуры.

Книга снабжена значительным числом примеров и конкретных частных задач, более детально раскрывающих существо излагаемой теории и возможности использования ЭВМ. Перечень литературы включает источники, на которые даны ссылки в книге, и не претендует на полную библиографию по данному вопросу.

Общая редакция книги проведена И. Е. Казаковым.

Авторы признательны рецензенту профессору Б. Г. Доступову за полезные рекомендации при подготовке рукописи к изданию.

ВВЕДЕНИЕ

Современный научно-технический прогресс, развитие вычислительной техники открывают широкие возможности для автоматизации сложных динамических систем и процессов в них в условиях целенаправленного изменения структуры или их параметрической и структурной неопределенности. Принято различать *стационарную и нестационарную, параметрическую и структурную неопределенности* [29, 40] объектов управления и систем в целом.

Стационарная неопределенность не изменяется в процессе функционирования — система имеет неопределенные постоянные параметры и структуру. Стационарная неопределенность практически встречается во всех динамических системах, так как исследователь или разработчик их не имеет точной информации о реальных параметрах объектов управления, а иногда и его структуры. Система функционирует и выполняет свою задачу, но ее динамика и конечный результат зависят от конкретных значений случайных параметров и структуры, которые они имеют в конкретных ситуациях. Эти случайные параметры и структура могут быть подчинены определенным статистическим закономерностям или принимать минимальные или максимальные значения. К моменту начала функционирования системы эти параметры и структура могут принять определенные значения и вид на дискретном или континуальном множестве и далее не изменяться. Особенностью таких динамических систем являются параметрическая и структурная неопределенности в начальный момент, не изменяющиеся в процессе функционирования, и стохастичность самого процесса при действии случайных сигналов и помех.

Нестационарная параметрическая и структурная неопределенности состоят в изменении их в процессе функционирования системы. Наибольший практический интерес здесь представляет класс систем и задач, в которых параметрическая и структурная неопределенности возникают дискретно вследствие резкого внезапного изменения условий, внешних воздействий в процессе функционирования. Системы и задачи с нестационарными неопределенностями являются более общими, чем со стационарными неопределенностями, так как наряду со случайной неопределенностью параметров и структур в последних имеет место скачко-

образная смена структуры в процессе функционирования. Особенностью нестационарных динамических систем являются скачкообразно спонтанно изменяющиеся параметрическая и структурная неопределенности в процессе функционирования при действии случайных сигналов и помех.

К исследованию таких динамических систем приводит большой круг практических задач из различных областей науки и техники. Задачи со стационарной параметрической и структурной неопределенностями стали изучаться сравнительно давно при идентификации параметров и структур, т. е. при оценке конкретных их реализаций в заданной динамической системе. Позже стали изучаться задачи, в которых неизвестные параметры в системе имеют статистический характер, подчинены некоторому стационарному распределению. Наиболее полно это направление исследований изложено в [40].

Если стационарная параметрическая неопределенность такова, что известен только диапазон изменения и неизвестно распределение, то такие задачи эффективно решаются путем использования *гарантирующего* (минимаксного) подхода, при котором неопределенные факторы задаются предельными значениями на некотором доверительном множестве. Достаточно полное представление об этом подходе применительно к динамическим системам можно получить из [44].

Задачи с нестационарной параметрической и структурной неопределенностями стали интенсивно изучаться сравнительно недавно. Простейшими системами такого класса являются системы со скачкообразными изменениями параметров [2, 3, 11, 46, 47, 50, 55, 58 и др.]. В статистической радиотехнике близкие к этим задачи о срыве слежения и о достижении стохастическим процессом границы рассматривались в работах [48, 64, 65, 66, 76 и др.]. Впервые систематическое изложение таких задач и методов их анализа дано в [4, 5, 12, 27, 28]. Достаточно подробный перечень исследований задач с нестационарной параметрической и структурной неопределенностями, подчиняющимися статистическим закономерностям, приведен в [29]. Динамические системы с нестационарной параметрической и структурной неопределенностями получили название *систем со случайно изменяющейся структурой*. Исследование таких систем можно проводить с помощью имитационного моделирования или на основе аналитической теории, оперирующей уравнениями для вероятностных характеристик. Построить достаточно общую аналитическую теорию систем со случайной структурой удалось лишь на основе специального подкласса *марковских процессов со случайной структурой* (*разрывных марковских процессов*) с поглощением и восстановлением реализаций. В этой теории обобщаются свойства известных кусочно-непрерывных марковских процессов и процессов с непрерывными и дискретными компонентами. Это обобщение позволило сформулировать и решить ряд новых задач из класса систем со случайным изменением структуры, а также по-

лучить некоторые известные результаты, но более общим способом.

К настоящему времени теория динамических стохастических систем со случайным изменением структуры получила дальнейшее развитие. Развита общие аналитические методы анализа, основанные на решении уравнений для функций распределения вероятности, а также приближенные методы анализа систем со случайной структурой. В данной книге дается единый общий аналитический метод статистического анализа динамических стохастических систем со случайно изменяющейся структурой, развитый авторами. Общий метод анализа систем со случайными скачкообразными изменениями структуры развит на основе рассмотрения их динамики в пространстве состояний и интегрирования обобщенных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова для функций плотности вероятности. Приближенные методы основаны на анализе уравнений для вероятностных моментов фазовых координат системы и уравнений для вероятностей состояний (структур), в которых находится система.

Следует отметить, что задачи исследования систем со случайной структурой сложнее соответствующих задач для систем с неизменяемой структурой. Это обусловлено тем, что возникает дополнительный случайный фактор изменения структуры системы, что можно интерпретировать как дополнительное случайное дискретное воздействие на систему. Успешное исследование таких систем должно базироваться на широком использовании средств вычислительной техники.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 1.1. Системы со случайной структурой

В современной технике, ряде отраслей науки и в научных исследованиях, связанных с моделированием сложных явлений и процессов управления, широкое распространение приобретают *динамические системы со случайными изменениями условий функционирования (ситуационной обстановки) и возмущений, приводящими к внезапному изменению структуры в целом — к структурной неопределенности*. Укажем некоторые задачи, решение которых приводит к необходимости применения динамических систем со случайными внезапными скачкообразными изменениями структуры в процессе их функционирования. К ним прежде всего следует отнести задачу автоматизации управления системой, имеющей на перекрывающихся временных интервалах различные режимы работы и разные структуры (например, энергосистема с подключением и выключением потребителей в случайные моменты времени). Другим примером служит летательный аппарат с автоматической или полуавтоматической системой управления, обеспечивающей различные режимы полета и наведения (различные траектории полета и их смену на случайных последовательных интервалах времени).

Одной из важнейших задач в управлении полетом летательных аппаратов, в технике связи, навигации судов, робототехнике и в других технических отраслях является задача поиска сигнала (источника сигнала) и его сопровождения (слежения за параметрами сигнала). Эта задача комплексная, так как содержит два этапа: поиска (распознавания) сигнала и управления. Каждый из этих этапов требует различных технических устройств для решения конкретной части задачи и, следовательно, приводит к различным структурам. Вместе с тем необходимость автоматизации всего процесса распознавания и управления заставляет объединить эти различные подсистемы в единую систему с двумя структурами. Включение (или переключение) каждой из подсистем должно производиться автоматически в зависимости от случайного состояния, в котором находится вся система в целом (наличие сигнала или его отсутствие). Рассмотренная задача — простейшая, она приводит к необходимости иметь автоматическую систему, состоящую из двух подсистем с различными структурами, назначение которой состоит в обеспечении слежения за

сигналом или источником сигнала при наличии помех, возможных нарушений регулярного процесса сопровождения, потерь сигнала вследствие непредвиденных причин.

Естественным обобщением являются системы со многими детерминированными структурами (*мультиструктурные системы*), переходы в которых совершаются в случайные моменты времени, зависящие или не зависящие от состояния. К подобной комплексной автоматической системе приводит также задача управления технологическим процессом, в котором возможны несколько режимов, зависящих от состояния или внешних условий.

Случайное резкое изменение режима функционирования динамической системы в случайные моменты времени может происходить вследствие параметрических нарушений (отказов) в отдельных блоках, выхода некоторых параметров из поля допуска, а также вследствие ограничений фазовых координат.

В современной технике широкое применение находят динамические системы с ЦВМ в контуре управления. Функционирование ЦВМ может сопровождаться сбоями при реализации вычислительных операций с последующим восстановлением заданного алгоритма. На интервале сбоя в ЦВМ реализуется другой вычислительный алгоритм. Это соответствует изменению структуры системы. После восстановления алгоритма вычислений система переходит в прежнюю структуру.

Случайные перерывы информации в случайные моменты времени вследствие непреднамеренных и преднамеренных действий внешней среды, приводящие к перерывам управления или к различным управлениям на случайных неперекрывающихся интервалах времени, также приводят к смене структуры системы. Процесс распознавания полезного сигнала на фоне скачкообразно изменяющихся помех можно интерпретировать как изменение структуры измерителя, входящего в автоматическую систему. Задача комплексирования различных измерителей при сложной информационной обстановке функционирующего объекта управления реализуется с помощью смены структур блока измерителей в автоматической системе. Наконец, управление различными системами от одной управляющей ЦВМ в прерывистом режиме на случайных или регулярных интервалах времени относится к рассматриваемому кругу задач.

Перечисленные задачи имеют широкое распространение и важное практическое значение на современной стадии автоматизации процессов управления. Они возникают в различных отраслях техники, в физике, химии, экономике, экологии, медицине, социологии и других отраслях науки. Характерными особенностями таких задач и соответствующих динамических систем являются: *структурная неопределенность* — смена структуры в случайные моменты времени в процессе функционирования — и *стохастичность процессов* в них. Обе эти особенности являются объективными характеристиками процесса функционирования сложных динамических систем. Они получили название *динамических*

стохастических систем со случайной сменой структуры, или систем со случайной структурой. Частным видом таких динамических систем являются так называемые *бинарные системы* [19], в которых рассматриваются детерминированные специально организованные процессы целенаправленного изменения структуры, в том числе и скачкообразного.

Стохастичность и структурная неопределенность рассматриваемых задач и динамических систем создают трудности их исследования и использования. Трудности эти характеризуются большим объемом перерабатываемой информации для полного описания вследствие стохастичности процессов и неопределенности структуры и континуальной неопределенностью структуры системы. Поэтому важно прежде всего определить класс динамических систем и их подходящую физическую модель, чтобы можно было составить математическое описание ее функционирования.

Среди указанных задач и систем важное практическое значение и применение имеют такие, которые характеризуются не континуумом, а счетным конечным множеством детерминированных структур со случайными моментами времени смены их. Такие системы на случайных неперекрывающихся интервалах времени имеют определенную детерминированную структуру. Смена структур происходит скачкообразно в случайные моменты времени под воздействием внешних возмущений, смены обстановки или в зависимости от значений некоторых фазовых координат и их комбинаций. Этот класс динамических систем со случайными скачкообразными изменениями структуры и представляет предмет развиваемой авторами теории. В соответствии с предметом исследования такая теория получила название *теории динамических систем со случайной сменой структуры*. В дальнейшем в книге будем использовать более короткий термин: *теория систем со случайной структурой*.

Назначение, конструкция и принцип устройства рассматриваемых систем различны, но главной особенностью их является резкое внезапное скачкообразное изменение параметров, включение новых звеньев, изменение структуры в случайные моменты времени в процессе функционирования. Итак, физическая модель класса систем со случайной структурой следующая:

- система состоит из звеньев различной или однородной физической природы, в ней происходит целенаправленный процесс управления;

- система динамическая, т. е. ее фазовые координаты состояния изменяются с течением времени;

- система стохастическая, так как входные сигналы и возмущения являются непрерывными или непрерывнозначными случайными функциями времени, а время изменяется непрерывно или дискретно;

- структура системы в целом или отдельных ее звеньев и значения параметров скачкообразно изменяются по случайному

закону в случайные моменты времени, зависящие или не зависящие от фазовых координат состояния, т. е. система скачком переходит от одной структуры к другой;

— состояния или структуры, в которых может находиться динамическая система, являются детерминированными;

— число структур, в которых может находиться система, счетно и конечно.

К подобного типа физической модели можно привести большинство перечисленных выше задач и систем при соответствующих допущениях, вытекающих из физического смысла рассматриваемых задач. Теперь можно приступить к составлению математической модели системы со случайной структурой.

§ 1.2. Стохастические уравнения систем

Теория исследования систем со случайной структурой должна базироваться на их адекватной математической модели. Математической моделью динамической системы является ее оператор, или уравнения, характеризующие протекающие в ней процессы преобразования информации и управления.

Широко распространенными моделями, применяемыми в инженерной практике и научных исследованиях, служат системы с сосредоточенными параметрами. Поведение таких систем характеризуется обыкновенными дифференциальными уравнениями и функциональными зависимостями. Для описания функционирования систем с распределенными параметрами используют дифференциальные уравнения в частных производных.

В данной книге будут рассматриваться математические модели систем с сосредоточенными параметрами. В современной теории управления применяют различные способы математического описания систем. Линейные стационарные системы описываются с помощью передаточных функций и частотных характеристик или с помощью весовых функций. Нелинейные и линейные нестационарные системы — с помощью дифференциальных или разностных уравнений, разрешенных относительно первых производных или разностей. Последний способ представляет собой математическое описание системы в фазовом пространстве или *пространстве состояний*. Он удобен при моделировании с помощью ЦВМ. Мы будем использовать преимущественно этот способ математического описания функционирования, дающий возможность развить единый подход к анализу систем различного назначения с использованием вычислительных машин.

В типичных условиях любая динамическая система находится под действием случайных управляющих сигналов и возмущений. Следовательно, ее состояние в любой момент времени является случайным и при описании в фазовом пространстве состояний характеризуется стохастическим вектором $y(t)$ размерности n_y с компонентами $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_{n_y}(t)$. Такой вектор будем пони-

мать как вектор-столбец или как транспонированный вектор-строку $y^T(t)$.

Систему со случайной структурой удобно характеризовать номером структуры $s(t) = \overline{1, n}$ и вектором состояния $y(t)$. Вектор $y(t)$ может быть непрерывным случайным процессом или дискретной случайной непрерывнозначной последовательностью, дискретной цепью или дискретным процессом [64, 66]; номер $s(t)$ — случайным дискретным скалярным процессом, принимающим значения на конечном счетном множестве $\overline{1, n}$. В некоторых задачах дискретный процесс $s(t)$ удобно считать n_s -мерным вектором $s(t) = [s_1(t), \dots, s_{n_s}(t)]^T$. Каждый компонент $s_i(t)$ этого вектора принимает значения $s_i = \overline{1, n_i}$. От векторного процесса $s(t)$ можно перейти к скалярному с числом значений $s(t) = \overline{1, n}$ при $n = \sum_{i=1}^{n_s} n_i$. В дальнейшем изложении векторную трактовку $s(t)$ будем каждый раз особо оговаривать.

Достаточно общая математическая модель динамической непрерывной нелинейной стохастической системы со случайной структурой имеет вид уравнения Коши [4, 12, 28]

$$\dot{y} = a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t)u + F^{(s)}(y, t)\xi, \quad y(t_0) = y_0, \quad (1.1)$$

где $y(t)$ — непрерывный n_y -мерный вектор; $a^{(s)}(y, t)$ — вектор; $B^{(s)}(y, t)$, $F^{(s)}(y, t)$ — матрицы с компонентами — функциями вектора $y(t)$; u — детерминированная n_u -мерная векторная функция времени или фазовых координат (вектор управления); $\xi(t)$ — n_ξ -мерный вектор центрированного гауссовского белого шума с матрицей интенсивностей $G(t)$ и корреляционной функцией вида $K_\xi(t, t') = G(t)\delta(t - t')$; $\delta(t - t')$ — функция Дирака; $s = \overline{1, n}$ — номер (индекс) структуры; n — число детерминированных структур.

Уравнение (1.1), в которое входит вектор белых шумов, называется *стохастическим*. При его интегрировании возникают так называемые *стохастические интегралы* от произведения функции фазового вектора $y(t)$ и белого шума $\xi(t)$. В зависимости от способа их вычисления появляются различные трактовки и названия соответствующих интегралов. Наиболее употребительные из них — *несимметризованный* интеграл Ито и *симметризованный* Стратоновича. В зависимости от этих определений уравнение (1.1) имеет аналогичное им название [54, 61].

Начальное состояние системы задается случайным вектором y_0 с компонентами $y_{10}, \dots, y_{n_{y0}}$ и заданной функцией плотности вероятности $f(y_0, t_0)$ или числовыми характеристиками — моментами начального распределения.

К канонической форме (1.1) можно преобразовать уравнения динамических систем практически различными способами в зависимости от типа исходных уравнений и характера случайных возмущений, как, например, показано в [32, 42].

Для линейных систем уравнение (1.1) принимает вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}(t)\xi(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{A}^{(s)}(t)$, $\mathbf{B}^{(s)}(t)$, $\mathbf{F}^{(s)}(t)$ — заданные матрицы.

В современной технике и научных исследованиях широкое распространение имеют дискретные системы, к которым относятся системы с цифровыми вычислительными машинами в контуре управления. В дискретных системах квантуются временной интервал и величина сигнала.

В цифровом устройстве квантование осуществляется вычислительной машиной. При большом числе уровней квантуемого сигнала, т. е. при большом числе разрядов вычислительного устройства, дискретностью по уровню можно пренебречь. Тогда цифровая система приводится к импульсной с непрерывным или непрерывнозначным выходом. Будем предполагать, что интервал дискретности по времени в цифровых системах $T_n = \Delta t$ достаточно мал, и за это время система практически не изменяет структуру, так как вероятности переходов пропорциональны Δt . В частности, это всегда соблюдается при переходе от непрерывных уравнений (1.1), (1.2) к разностным (рекуррентным) с помощью любого метода численного интегрирования.

Такая дискретная система в каждой s -й структуре может быть охарактеризована каноническим рекуррентным стохастическим уравнением вида [32]

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{a}^{(s)}(\mathbf{y}, k) + \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{y}, k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{y}, k)\xi(k) \quad (1.3)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; s = \overline{1, n}). \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

где $\mathbf{y}(k)$ — дискретная непрерывнозначная n_y -мерная последовательность; $\xi(k)$ — вектор центрированного дискретного гауссовского белого шума с корреляционной матрицей $\mathbf{G}(k)$ и матрицей корреляционных функций $\mathbf{K}_\xi(k, h) = \mathbf{G}(k)\delta_{kh}$; δ_{kh} — функция Кронекера; $s(k)$ — дискретная последовательность — цепь.

Для линейной системы векторно-матричное рекуррентное стохастическое уравнение принимает вид

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{A}^{(s)}(k)\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}^{(s)}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}^{(s)}(k)\xi(k) \quad (1.4)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; s = \overline{1, n}).$$

Уравнение (1.4) можно записать в другом виде, если ввести обозначения $\Phi^{(s)}(k, k+1) = \mathbf{I}(k) + \mathbf{A}^{(s)}(k)$, $\mathbf{I}(k)$ — единичная матрица:

$$\mathbf{y}(k+1) = \Phi^{(s)}(k, k+1)\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}^{(s)}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}^{(s)}(k)\xi(k) \quad (1.5)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; s = \overline{1, n}),$$

где $\Phi^{(s)}(k, k+1)$ — переходная матрица состояния.

Наряду с рассмотренными системами с малым интервалом дискретности по времени T_n существуют еще такие, у которых

интервал квантования по времени большой и даже неравномерный. На этом интервале система может изменить структуру. Для таких дискретных систем с непрерывнозначным вектором фазовых координат $y(k)$ рекуррентное нелинейное уравнение примем в общей форме

$$y(k+1) = \varphi[y(k), s(k+1), s(k), \xi(k), k+1], \quad (1.6)$$

где $\varphi(\cdot)$ — нелинейная детерминированная векторная функция; $s(k)$ — n_s -мерный вектор индекса структуры — дискретная цепь; $\xi(k)$ — дискретный центрированный гауссовский вектор белого шума.

Выписанные уравнения примем в качестве математических моделей динамических стохастических систем со случайной структурой, рассматриваемых в данной книге. Таким образом, динамическая система со случайной структурой характеризуется номером детерминированных структур $s(t)$, число которых n_s , и непрерывным или непрерывнозначным n_y -мерным вектором состояния $y(t)$ или $y(k)$ в каждой структуре. Будем в дальнейшем характеризовать систему со случайной структурой *расширенным вектором состояния* $[y^T, s]^T$, у которого n_y компонентов являются фазовыми координатами, а один дискретный компонент указывает номер структуры.

§ 1.3. Классификация систем

Общим признаком классификации систем со случайной структурой является характер связи процессов $s(t)$ (номера структуры) и фазового вектора состояния $y(t)$, где t может быть непрерывным или дискретным: $t_k = kT_n$. По этому признаку различают системы с независимой и с зависимой от вектора $y(t)$ структурой. Процесс $s(t)$ влияет на $y(t)$, так как при смене номера s происходит прерывание функционирования отдельных подсистем и подключение других. Обратное влияние не обязательно может иметь место. Если протекание процесса $s(t)$ смены структур зависит только от времени и не зависит от фазового вектора $y(t)$, то такие системы называются системами с *независимой случайной структурой*. Очевидно, что для таких систем статистические свойства процесса $s(t)$ могут изучаться независимо, а основные особенности определяются влиянием $s(t)$ на $y(t)$.

В системах с *зависимой случайной структурой* существует взаимное влияние и зависимость процессов $s(t)$ и $y(t)$. Особенность заключается в характере влияния $y(t)$ на $s(t)$, для которого рассматриваются два типа зависимости. В первом это влияние проявляется статистически, т. е. моменты перехода из одного состояния в другое случайным образом зависят от изменения фазовых координат подсистем. Переходы от одной структуры к другой и наоборот могут происходить при любых значениях $y(t)$, но с различной вероятностью. Системы, обладающие подобными свойствами, называются системами с *распределенными перехода-*

ми. Во втором типе зависимости моменты переходов могут быть функционально связаны с ходом изменения фазовых координат, т. е. переходы происходят в те моменты времени, когда процесс достигает определенных пороговых значений или границ (гиперповерхностей). Такие системы называются системами с *сосредоточенными переходами*.

Таким образом, динамические системы со случайной структурой разделяются на три типа: с *независимой* случайной структурой, с *зависимой* случайной структурой при *распределенных* переходах в пространстве вектора $y(t)$ и с *зависимой* случайной структурой при *сосредоточенных* переходах на гиперплоскостях переключения в пространстве векторов $y(t)$. Два последних типа являются системами со случайной структурой, зависящей от значений фазовых координат процесса.

§ 1.4. Задачи и методы анализа

Задачи вероятностного анализа систем со случайной структурой разнообразны. Это оценка вероятности нахождения системы в каждом из возможных состояний и времени перехода из одного в другое, определение распределения или вероятностных числовых характеристик всех или части фазовых координат, оценка точности воспроизведения или преобразования заданных сигналов в присутствии помех, исследование устойчивости и точности процессов управления при действии случайных возмущений.

Перечисленные задачи могут решаться с целью оценки качества функционирования системы при заданных параметрах или с целью выбора наилучших параметров, удовлетворяющих определенным критериям. При этом для систем различного назначения те или иные задачи приобретают основное значение, а другие являются второстепенными. Так, для системы поиска и слежения оценка вероятности нахождения ее в каждом из возможных состояний является важной. Представляют интерес оценки зависимости этих вероятностей от уровня помех, значений параметров системы. Для систем с возможными нарушениями (с отказами) важными задачами являются те, где оценивается точность работы, точность воспроизведения заданных сигналов, устойчивость. Для систем управления с перестраиваемой структурой — точность, устойчивость, степень влияния помех, помехоустойчивость.

Основными числовыми вероятностными оценками являются начальные и центральные моменты фазовых координат: первый начальный момент — *вектор математического ожидания* $m(t) = M[y(t)]$ и второй центральный момент — *матрица корреляционных моментов* (корреляционная матрица)* $\Theta(t) = M\{[y(t) - m(t)][y(t) - m(t)]^T\}$, а также *матрица корреляционных функций* $K(t, t') = M[y^0(t) \cdot y^{0T}(t')]$. Второй начальный

*) Применяется также термин *ковариационная матрица*.

момент связан с $\mathbf{m}(t)$ и $\Theta(t)$ формулой

$$\kappa_2(t) = \mathbf{m}(t) \mathbf{m}^T(t) + \Theta(t) = \Phi(t). \quad (1.7)$$

Более полными числовыми характеристиками являются вероятностные начальные моменты высших порядков

$$\kappa_h(t) = M \left[y_1^{h_1}(t) \dots y_{n_y}^{h_{n_y}}(t) \right] \quad (h = h_1 + \dots + h_{n_y}; h = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Оценка точности системы базируется на определении закона распределения фазовых координат. *Ошибкой системы* называется разность между выходной переменной $y_i(t)$ на каждом выходе и требуемым теоретическим значением этой переменной $y_{ir}(t)$ на том же выходе:

$$\varepsilon_i(t) = y_i(t) - y_{ir}(t) \quad (i = \overline{1, n_y}). \quad (1.9)$$

В векторной форме формула для ошибки системы имеет вид

$$\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_r(t), \quad (1.10)$$

где $\mathbf{y}(t)$ — вектор фазовых координат системы; $\mathbf{y}_r(t)$ — вектор требуемых фазовых координат.

Основная задача оценки точности системы со случайной структурой состоит в определении вектора математического ожидания $\mathbf{m}_\varepsilon(t)$ и корреляционной матрицы $\Theta_\varepsilon(t)$ ошибки. Иногда точность характеризуется скалярной величиной — квадратичной формой

$$\eta_\varepsilon(t) = \mathbf{m}_\varepsilon^T(t) \Gamma \mathbf{m}_\varepsilon(t) + \text{tr} [\Gamma \Theta_\varepsilon(t)], \quad (1.11)$$

где заданная матрица Γ часто выбирается диагональной с единицами в первых k столбцах и нулями в остальных.

Анализ устойчивости является важной составной частью более общей задачи оценки качества автоматических систем. Понятие об устойчивости связано с рассмотрением движений системы при различных условиях функционирования. В детерминированной теории существуют различные виды устойчивости. Например, различают устойчивость локальную и в целом неасимптотическую, асимптотическую, абсолютную и т. д. Еще большее разнообразие возникает при изучении стохастической устойчивости. В настоящее время не существует универсальных методов исследования устойчивости стохастических систем. Поэтому эти задачи решаются применительно к конкретной системе с использованием различных математических приемов. В теории устойчивости детерминированных систем широкое применение находят первый метод Ляпунова, основанный на непосредственном изучении свойств решений дифференциальных или разностных уравнений, и второй метод Ляпунова, основанный на построении функций, обладающих определенными свойствами и гарантирующих устойчивость изучаемой системы. Соответствующее обобщение методов

Ляпунова для стохастических систем дает возможность изучать стохастическую устойчивость на основании анализа реализаций процессов и их вероятностных характеристик [54, 61, 62].

Анализ стохастических систем со случайной структурой основывается на определении функций плотности вероятности распределения их фазовых координат. Методы получения уравнений, определяющих эти функции, хорошо разработаны, но должны быть обобщены на системы со случайной структурой. Методы решения этих уравнений достаточно трудоемки, и практически способы точного решения нелинейных систем малоэффективны.

Поэтому большое значение в приложениях к инженерной практике имеет корреляционная теория, базирующаяся на анализе моментных характеристик. Методы и результаты этой теории широко используются в книге.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 2.1. Эволюция вектора состояния системы как марковский процесс

Состояние и эволюция динамической системы со случайной структурой, как было показано в предыдущей главе, полностью определяются каноническими уравнениями (1.1), (1.2) при непрерывном и уравнениями (1.3)—(1.5) при дискретном их описании и законом изменения номера структуры. Вектор состояния $y(t)$, определяемый уравнениями (1.1), (1.4) в каждой структуре, представляет собой многомерный марковский случайный процесс [17]. Доказательство марковости вектора $y(t)$ при фиксировании s основывается на рассмотрении интеграла, например, уравнения (1.1) для двух моментов времени t и $t + \Delta t$. Из уравнения (1.1) вытекает следующая формула, связывающая значения интеграла уравнения для моментов времени t и $t + \Delta t$:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + [a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t)u] \Delta t + \\ + \int_t^{t+\Delta t} F^{(s)}(y, \tau) \xi(\tau) d\tau + o(\Delta t). \quad (2.1)$$

Так как $\xi(t)$ является белым гауссовским шумом и статистически не зависит от значений $\xi(\tau)$ и $y(\tau)$ при $\tau < t$, то значение вектора $y(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$ зависит только от $y(t)$. Отсюда следует, что условная плотность вероятности распределения вектора $y(t)$ при фиксированном s относительно любой совокупности случайных векторных величин $y(t_1), \dots, y(t_k)$ при $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ не зависит от этих значений и совпадает с условной плотностью вероятности относительно величины $y(t)$, т. е.

$$f[y(t + \Delta t), s | y(t), y(t_k), \dots, y(t_1), s] = f[y(t + \Delta t), s | y(t), s]. \quad (2.2)$$

По определению, такой случайный процесс является марковским, а каждая его фазовая координата представляет собой компонент многомерного марковского процесса. Векторное уравнение (1.1) при фиксированном s представляет собой математическую модель марковского многомерного непрерывного процесса. Такое же утверждение относится и к уравнению (1.2).

Аналогичные рассуждения можно провести для стохастических рекуррентных уравнений (1.3) — (1.6), характеризующих эволюцию вектора состояния дискретной (импульсной или цифровой) системы. Действительно, рекуррентное уравнение (1.3) при фиксированном s выражает вектор $y(k+1)$ в момент $k+1$ через вектор $y(k)$ на предыдущем числе и вектор дискретного белого шума $\xi(k)$ в момент времени k . Из этого следует, что значение $y(k+1)$ на шаге $k+1$ зависит только от $y(k)$, т. е. от значения вектора состояния на предыдущем шаге, и не зависит от прошлых значений до шага k . Белый шум $\xi(k)$ статистически не зависит от значений шума на предыдущих шагах от 0 до $k-1$. Следовательно, рассматриваемый векторный дискретный процесс, определенный уравнением (1.3), является марковской непрерывной или дискретной последовательностью (марковской цепью). Такое же утверждение справедливо относительно модели (1.4), (1.5).

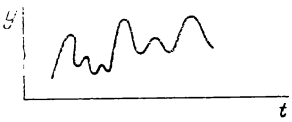
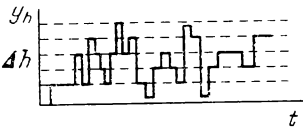
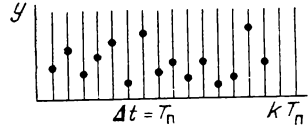
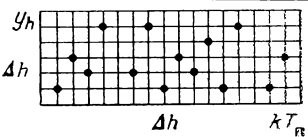
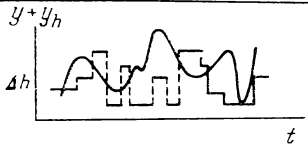
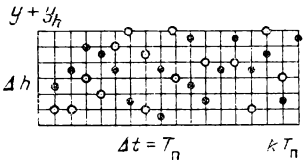
Таким образом, математическим моделям (1.1), (1.2) и (1.3) — (1.6) динамических систем со случайной структурой при фиксированном номере соответствуют марковские процессы $y(t)$ или последовательности $y(k)$. Для полного описания всей совокупности этих процессов при случайном значении номера структуры необходимо охарактеризовать дискретный процесс $s(t)$, случайными реализациями которого являются номера структуры $s=1, n$. В результате для совместного описания эволюции динамической системы со случайной структурой приходим к стохастическому процессу, состоящему из непрерывного или непрерывно-значного действительного случайного вектора $y(t)$ и дискретного скаляра $s(t)$: $[y^T(t), s(t)]^T$. Особенностью такого случайного процесса является то, что на неперекрывающихся временных интервалах существуют процессы $y^{(s)}(t)$, соответствующие s -й структуре системы и ее уравнениям, а смена этих интервалов времени происходит скачкообразно в случайные моменты времени, определяемые процессом $s(t)$.

По существу, рассматриваемый случайный процесс можно интерпретировать как кусочно-непрерывный (непрерывнозначный), состоящий из отрезков векторных марковских процессов одинаковой или разной размерности с заданными вероятностными характеристиками. Для его построения следует взять совокупность указанных марковских процессов, присвоив им номера от 1 до n , и последовательность моментов времени t_k ($k=1, 2, \dots$). На каждом из неперекрывающихся интервалов времени $t_{k+1} - t_k$ имеет место процесс $y^{(s)}(t)$. Момент времени t_k внезапного включения процесса $y^{(s)}(t)$ случаен и представляет собой дискретный скалярный процесс $s(t)$ смены номера структуры, подчиненный определенным статистическим закономерностям. Получающийся в результате стохастический процесс целесообразно выделить в специальный подкласс и назвать *процессом со случайной сменой структуры*, или, более коротко, *процессом со случайной структурой*. Такие стохастические процессы могут иметь различную фи-

зическую природу и вероятностные характеристики, но главной их особенностью является скачкообразное изменение структуры в случайные моменты времени при переходе из одного состояния в другое в соответствии с изменением $s(t)$.

Случайный дискретный процесс $s(t)$ может быть произвольным немарковским, марковским или условным марковским, зависящим от вектора $y(t)$. В этой книге будем считать $s(t)$ дискрет-

Стохастические марковские процессы Таблица 2.1

Аргумент	Пространство	Вид процесса $(y)t$	Название процесса
Н	Н		Непрерывный процесс
Н	Д		Дискретный процесс
Д	Н		Непрерывнозначная последовательность
Д	Д		Дискретная последовательность (цепь)
Н	Н + Д		Смешанный процесс
Д	Н + Д		Смешанная последовательность

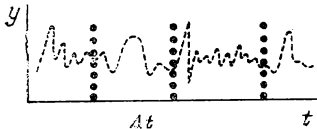
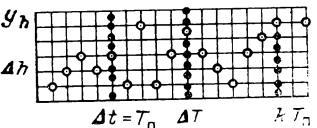
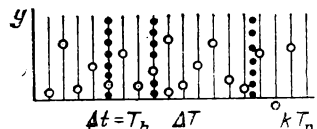
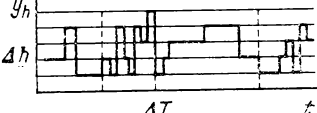
Н — непрерывный процесс; Д — дискретный; $\Delta t = T_n$ — шаг дискретности по времени; Δh — шаг дискретности по уровню.

ным марковским и в общем случае условным марковским процессом. Такой дискретный процесс $s(t)$ соответствует многим физическим моделям систем со случайной структурой, рассмотренных в предыдущей главе.

В табл. 2.1 дана классификация стохастических марковских процессов, встречающихся в системах автоматического управления. В табл. 2.2 выделен подкласс марковских процессов со случайной структурой, характеризующийся тем, что изменение времени дополнительно квантуется случайным временным интервалом

Таблица 2.2

Стохастические марковские разрывные процессы со случайной структурой

Аргумент	Пространство	Вид процесса $y(t)$	Название процесса
Н/Д	Н		Разрывный процесс
Д/Д	Д		Разрывная цепь
Д/Д	Н		Разрывная последовательность
Н/Д	Д		Разрывный дискретный процесс

Н — непрерывный процесс; Д — дискретный; $\Delta t = T_n$ — шаг дискретности по времени; Δh — шаг дискретности по уровню; ΔT — вторичный интервал дискретности разрывного процесса (неперекрывающиеся интервалы).

лом, определяемым процессом $s(t)$. Рассматриваемые марковские процессы со случайной структурой являются принципиально разрывными вследствие вторичного квантования аргумента со случайной длительностью ΔT . На этих неперекрывающихся временных интервалах существуют разные марковские процессы.

Внутри введенного подкласса стохастических марковских процессов со случайной структурой целесообразно рассмотреть более точную классификацию, разделив их на четыре типа:

— *марковский разрывный процесс*, имеющий только случайное квантование по времени ΔT , но непрерывные значения внутри каждого интервала;

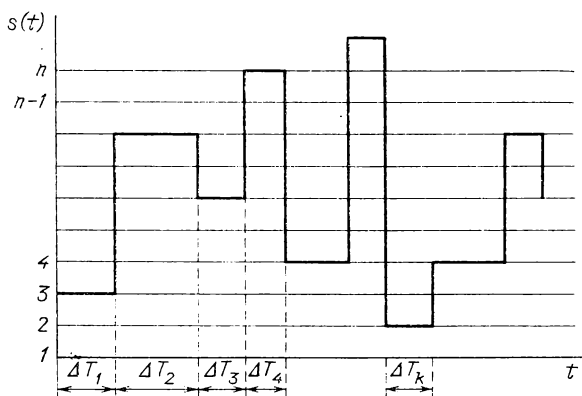


Рис. 2.1. Дискретный процесс

— *марковская разрывная цепь*, имеющая первичное детерминированное квантование по времени $\Delta t = T_n$, вторичное случайное квантование ΔT и дискретные значения процесса;

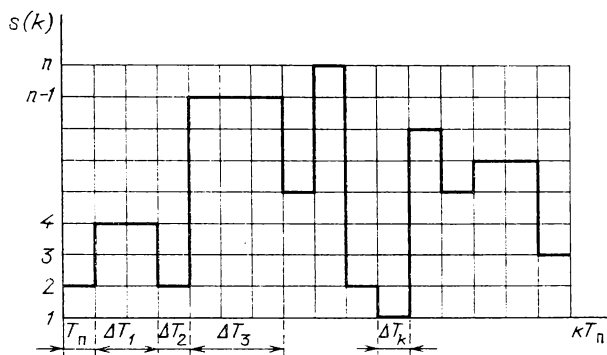


Рис. 2.2. Дискретная цепь

— *марковская разрывная последовательность*, имеющая первичное дискретное квантование по времени T_n , вторичное случайное квантование по времени ΔT и непрерывные значения процесса;

— *марковский разрывный дискретный процесс*, имеющий случайное квантование по времени ΔT и дискретные значения процесса.

В развиваемой теории систем со случайной структурой нашли применение и изучаются два первых типа марковских процессов

со случайной структурой с непрерывными значениями вектора $y(t)$, которые соответствуют динамическим системам, рассмотренным выше, в том числе и с ЦВМ в контуре управления.

Дискретный процесс $s(t)$, рассматриваемый далее, является дискретным процессом, квантованным по уровню при непрерывном времени, либо дискретной цепью при квантовании по уровню и по времени (рис. 2.1, 2.2).

Теперь можно уточнить классификацию систем со случайной структурой, данную в § 1.3: рассмотренные три типа систем суть системы с *марковской независимой структурой*, системы с *условно-марковской структурой при распределенных переходах*, системы с *условно-марковской структурой при сосредоточенных переходах*.

§ 2.2. Марковский разрывный стохастический процесс

Марковский разрывный стохастический процесс $[y^T(t), s(t)]^T$ является кусочно-непрерывным с непрерывными значениями n_y -мерного вектора $y(t)$ на неперекрывающихся случайных временных интервалах ΔT и дискретного скаляра $s(t)$. Согласно теореме Колмогорова [35] он полностью характеризуется конечномерными согласованными функциями распределения на интервалах постоянства $s(t)$

$$F_m[y(t_1), \dots, y(t_m); s] = \text{Вер} \left\{ \begin{matrix} y_1(t_1) < y_{11}, & \dots, & y_1(t_m) < y_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n_y}(t_1) < y_{n_y1}, & \dots, & y_{n_y}(t_m) < y_{n_y m} \end{matrix} ; s \right\} \quad (2.3)$$

при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном s . Теоретико-вероятностное описание случайного процесса основывается на задании совместных согласованных функций распределения $F_m(y(t_1), \dots, y(t_m); s)$ для конечного числа значений аргумента t . Разрывный процесс $[y^T(t), s(t)]^T$ при непрерывном векторном компоненте $y(t)$ с достаточно гладкими реализациями полностью определяется также конечномерными функциями плотности вероятности

$$f_m[y(t_1), \dots, y(t_m); s] = \frac{\partial^{n_y m} F_m(y(t_1), \dots, y(t_m); s)}{\partial y_{11} \dots \partial y_{n_y m}} \quad (2.4)$$

при фиксированном s . Функции $F_m[y(t_1), \dots, y(t_m); s]$ и $f_m(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_m); s)$ связаны между собой формулой

$$F_m[y(t_1), \dots, y(t_m); s] = \int_{-\infty}^{y(t_1)} \int_{-\infty}^{y(t_m)} f_m[y'(t_1), \dots, y'(t_m); s] dy'(t_1) \dots dy'(t_m). \quad (2.5)$$

Если векторный процесс $y(t)$ в последовательные моменты времени $t_1, \dots, t_{m-1}$ принимает значения $y(t_1), \dots, y(t_{m-1})$, то

для оценки вероятности вектора $\mathbf{y}(t_m)$ в момент $t_m > t_{m-1}$ применяется условная функция плотности вероятности $f(\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_{m-1}); s)$. Безусловная $f_m[\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_m); s]$ и условная $f[\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_{m-1}); s]$ функции плотности вероятности связаны на основании теоремы умножения вероятностей соотношением

$$\begin{aligned} f_m[\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_m); s] = \\ = f[\mathbf{y}(t_1); s] f[\mathbf{y}(t_2); s | \mathbf{y}(t_1); s] \dots f[\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_{m-1}); s], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где введено обозначение $f_1[\mathbf{y}(t_1); s] = f[\mathbf{y}(t_1); s]$ — первая функция плотности вероятности.

Для марковского процесса $\mathbf{y}(t)$, согласно определению, справедлива формула

$$f[\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_{m-1}); s] = f[\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_{m-1}); s]. \quad (2.7)$$

Тогда соотношение (2.6) для марковского процесса принимает вид

$$\begin{aligned} f_m[\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_m); s] = \\ = f[\mathbf{y}(t_1); s] f[\mathbf{y}(t_2); s | \mathbf{y}(t_1); s] \dots f[\mathbf{y}(t_m); s | \mathbf{y}(t_{m-1}); s]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Следовательно, для рассматриваемого марковского разрывного процесса распределение вероятности полностью определяется двумя функциями: первой функцией плотности вероятности $f(\mathbf{y}(t); s)$ и условной функцией $f[\mathbf{y}'(t'); s | \mathbf{y}(t); s]$, называемой *плотностью вероятности перехода*. Функции $f[\mathbf{y}(t); s] \geq 0$ и $f[\mathbf{y}'(t'); s | \mathbf{y}(t); s] \geq 0$ в дальнейшем будем записывать также в форме $f(\mathbf{y}, s, t)$ и $f(\mathbf{y}', s, t' | \mathbf{y}, s, t)$.

Если множество значений компонентов векторного процесса принадлежит бесконечному n_y -мерному пространству, а множество реализаций скаляра $s(t)$ счетно-конечно, то должны выполняться условия

$$\sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} = 1, \quad (2.9)$$

$$\sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}', s, t' | \mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y}' = 1. \quad (2.10)$$

Интеграл по всему фазовому пространству от функции $f(\mathbf{y}, s, t)$ обозначим через $p^{(s)}(t)$:

$$p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) есть вероятность того, что процесс находится в s -м состоянии, или вероятность s -й структуры. С учетом (2.11) первую функцию плотности вероятности и плотности вероятности

сти перехода разрывного марковского процесса представим в виде

$$f(\mathbf{y}, s, t) = p^{(s)}(t) f^{(s)}(\mathbf{y}, t), \quad (2.12)$$

$$f(\mathbf{y}, s, t | \mathbf{y}', s, t') = p^{(s)}(t) f^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t'), \quad (2.13)$$

где $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$, $f^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t')$ — условные функции плотности вероятности при заданном s .

Условная функция плотности вероятности $f(\mathbf{y}, t, s | \mathbf{y}', t', s)$ векторного процесса при совпадении моментов времени $t' = t$ на основании нормировки обращается в δ -функцию Дирака

$$f(\mathbf{y}, s, t | \mathbf{y}', s, t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}').$$

Плотность вероятности перехода $f(\mathbf{y}, s, t_2 | \mathbf{y}^*, s, t_1)$ разрывного марковского процесса удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского — Колмогорова — Чепмена при $t_1 < t' < t_2$ [28, 66]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}, s, t_2 | \mathbf{y}^*, s, t_1) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, s, t_2 | \mathbf{y}', s, t') f(\mathbf{y}', s, t' | \mathbf{y}^*, s, t_1) d\mathbf{y}', \end{aligned} \quad (2.14)$$

а первая функция плотности вероятности $f(\mathbf{y}, s, t)$ — соотношению

$$f(\mathbf{y}, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}', s, t') f(\mathbf{y}, s, t | \mathbf{y}', s, t_1) d\mathbf{y}', \quad (2.15)$$

являющимся следствием теоремы полной вероятности.

Столь же полным описанием рассматриваемого разрывного марковского процесса являются характеристические функции. По определению, они имеют вид

$$g(\lambda, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T \mathbf{y}} f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y}, \quad (2.16)$$

$$g(\lambda, s, t | \mathbf{y}', s, t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T \mathbf{y}} f(\mathbf{y}, s, t | \mathbf{y}', s, t') d\mathbf{y}. \quad (2.17)$$

Характеристическая функция может быть выражена через вероятностные начальные моменты рассматриваемого разрывного случайного процесса. Для этого в формулах (2.16) и (2.17) функцию $\exp[i\lambda^T \mathbf{y}]$ представим бесконечным рядом. В результате получим

$$\begin{aligned} g(\lambda, s, t) = 1 + \sum_{k=1}^{n_y} i\lambda_k M_s[y_k(t)] + \frac{1}{2!} \sum_{k,m=1}^{n_y} i^2 \lambda_k \lambda_m M_s[y_k(t) y_m(t)] + \\ + \frac{1}{3!} \sum_{k,m,r=1}^{n_y} i^3 \lambda_k \lambda_m \lambda_r M_s[y_k(t) y_m(t) y_r(t)] + \dots, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
g(\lambda, s, t | y^*, s, t_1) = 1 + \sum_{k=1}^{n_y} i \lambda_k M_s [y_k(t) | y(t_1) = y^*] + \\
+ \frac{1}{2!} \sum_{k,m=1}^{n_y} i^2 \lambda_k \lambda_m M_s [y_k(t) y_m(t) | y(t_1) = y^*] + \\
+ \frac{1}{3!} \sum_{k,m,r=1}^{n_y} i^3 \lambda_k \lambda_m \lambda_r M_s [y_k(t) y_m(t) y_r(t) | y(t_1) = y^*] + \dots, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

где $M_s [y_k(t) y_m(t) \dots] = \int_{-\infty}^{\infty} y_k(t) y_m(t) \dots f(y, s, t) dy$ — начальные моменты; $M_s [y_k(t) y_m(t) \dots | y(t_1) = y^*] = \int_{-\infty}^{\infty} y_k(t) y_m(t) \dots f(y, s, t | y^*, t) dy$ — условные начальные моменты процесса.

Рассматриваемый разрывный марковский процесс с непрерывными компонентами вектора состояния полностью описывается локальными характеристиками, которые связаны со свойством непрерывности марковского процесса при фиксированном s [47, 35, 68, 69, 73]. Под локальными характеристиками понимаются условные математические ожидания, а также условные корреляционные моменты приращений компонентов $y_k(t)$ при изменении аргумента t на малый интервал Δt . Для марковского кусочно-непрерывного процесса при фиксированном s эти локальные характеристики следующие:

$$\begin{aligned}
\Delta m_k^{(s)}(y, t) &= M_s [\{y_k(t + \Delta t) - y_k(t)\} | y, s, t] = \alpha_k^{(s)}(y, t) \Delta t + o(\Delta t), \\
\Delta m_{kr}^{(s)}(y, t) &= M_s [\{y_k(t + \Delta t) - y_k(t)\} \{y_r(t + \Delta t) - y_r(t)\} | y, s, t] = \\
&= D_{kr}^{(s)}(y, t) \Delta t + o(\Delta t), \quad (2.20) \\
\Delta m_{krm}^{(s)}(y, t) &= M_s [\{y_k(t + \Delta t) - y_k(t)\} \{y_r(t + \Delta t) - y_r(t)\} \\
&\quad \times \{y_m(t + \Delta t) - y_m(t)\} | y, s, t] = o(\Delta t),
\end{aligned}$$

где $y_k(t + \Delta t) - y_k(t) = \Delta y_k(t)$; $M_s[\cdot]$ — операция математического ожидания приращений по всем переменным при фиксированном векторе $y(t)$ и номере структуры s ; $\alpha_k^{(s)}(y, t)$ — компоненты вектора сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$; $D_{kr}^{(s)}(y, t)$ — компоненты матрицы диффузии $D^{(s)}(y, t)$; $o(\Delta t)$ — величины высшего порядка малости, чем Δt . Вектор $\alpha^{(s)}(y, t)$ и матрица $D^{(s)}(y, t)$ являются непрерывными функциями вместе со своими производными при фиксированном s . По определению, они могут быть вычислены по формулам

$$\alpha^{(s)}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left[\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} | y, s, t \right], \quad (2.21)$$

$$D^{(s)}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left[\frac{\Delta y(t) \Delta y^T(t)}{\Delta t} | y, s, t \right], \quad (2.22)$$

где $\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t + \Delta t) - \mathbf{y}(t)$ — приращение вектора $\mathbf{y}(t)$ на интервале Δt .

Условные моменты приращения выше второго имеют порядок малости $o(\Delta t)$ в соответствии с определением непрерывного марковского процесса [17, 35]. Поэтому их предельные значения при $\Delta t \rightarrow 0$ равны нулю. Локальные характеристики $\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и $\mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ полностью определяют дифференциальные уравнения, из которых могут быть получены функции плотности вероятности $f(\mathbf{y}, s, t)$ и $f(\mathbf{y}, s, t | \mathbf{y}', s, t')$, как будет показано в гл. 3.

§ 2.3. Марковская разрывная стохастическая последовательность

Кусочно-непрерывнозначная последовательность, или разрывная случайная последовательность $[y^T(k), s(k)]^T$ с непрерывными значениями действительного n_y -мерного вектора $y(t)$ и дискретного скаляра $s(k)$, согласно теореме Колмогорова [35], полностью характеризуется конечномерными согласованными функциями распределения

$$F_m[\mathbf{y}(k_1), \dots, \mathbf{y}(k_m); s] = \text{Bep} \left\{ \begin{array}{c} y_1(k_1) < y_{11}, \quad \dots, \quad y_1(k_m) < y_{1m} \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ; s \\ y_{n_y}(k_1) < y_{ny1}, \quad \dots, \quad y_{n_y}(k_m) < y_{ny,m} \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном s . Теоретико-вероятностное описание такого процесса базируется на задании совместных согласованных функций распределения $F_m(\mathbf{y}(k_1), \dots, \mathbf{y}(k_m), s)$ для конечного числа значений аргумента $t_k = kT_n$ ($k = \overline{1, m}$). При непрерывнозначном векторном компоненте $\mathbf{y}(k)$ с достаточно гладкими реализациями рассматриваемая стохастическая разрывная последовательность $[\mathbf{y}^T(k), s]^T$ полностью определяется конечномерными функциями плотности вероятности

$$f_m[\mathbf{y}(k_1), \dots, \mathbf{y}(k_m); s] = \frac{\partial^{n_y+m} f_m[\mathbf{y}(k_1), \dots, \mathbf{y}(k_m); s]}{\partial y_{11} \dots \partial y_{n_y m}}. \quad (2.24)$$

Не повторяя записи и выкладок предыдущего параграфа, отметим, что все определения и формулы (2.5) — (2.19), касающиеся непрерывного марковского многомерного процесса, распространяются на n_v -мерную непрерывнозначную последовательность случайной структуры, если в них положить $t_i = k_i T_n$ ($i = \overline{1, m}$).

Марковская разрывная последовательность может быть полностью определена локальными условными моментами прираще-

ний компонентом вектора $\mathbf{y}(k)$ за малый интервал квантования $T_n = \Delta t$:

$$\begin{aligned}\Delta m_k^{(s)}(\mathbf{y}, h) &= M_s \{ \{y_k(h+1) - y_k(h)\} | \mathbf{y}, s, h \} = \\ &= T_n \alpha_k^{(s)}(\mathbf{y}, h) + T_n o(T_n), \\ \Delta m_{kr}^{(s)}(\mathbf{y}, h) &= M_s \{ \{y_k(h+1) - y_k(h)\} \{y_r(h+1) - y_r(h)\} | \mathbf{y}, s, h \} = \\ &= T_n D_{kr}^{(s)}(\mathbf{y}, h) + T_n o(T_n), \quad (2.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta m_{krm}^{(s)}(\mathbf{y}, h) &= \\ &= M_s \{ \{y_k(h+1) - y_k(h)\} \{y_r(h+1) - y_r(h)\} \{y_m(h+1) - \\ &\quad - y_m(h)\} | \mathbf{y}, s, h \} = T_n o(T_n).\end{aligned}$$

Условные моменты приращений первого и второго порядков за малый интервал времени T_n представляют собой приращение вектора сноса $\Delta \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, h)$ и диффузионной матрицы $\Delta \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, h)$:

$$\Delta \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, h) = M[\Delta \mathbf{y}(h) | \mathbf{y}, s, h] = T_n \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, h), \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, h) &= M[\Delta \mathbf{y}(h) \Delta \mathbf{y}^T(h) | \mathbf{y}, s, h] = T_n \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, h) \\ &\quad (h = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.27)\end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{y}(h) = \mathbf{y}(h+1) - \mathbf{y}(h)$.

Условные моменты приращений степени выше второй имеют порядок малости меньше T_n^2 . Поэтому практически ими пренебрегают. Следовательно, ограничиваясь двумя моментами приращений, имеем приближенную характеристику случайной марковской разрывной последовательности. Если интервал дискретности T_n большой, то следует учитывать локальные характеристики более высокого порядка. Кроме того, на большом интервале возрастает вероятность смены структуры. Тогда локальные характеристики, вычисляемые при постоянстве s , не подходят для описания дискретного процесса. Необходимо использовать функции распределения.

§ 2.4. Локальные характеристики марковских разрывных процессов

Для многомерного марковского непрерывного процесса в каждом s -м состоянии локальными характеристиками являются вектор сноса $\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ с компонентами $\alpha_k^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и матрица диффузии $\mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ с компонентами $D_{kr}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$. Вектор сноса и матрица диффузии для марковского многомерного процесса, описываемого дифференциальным уравнением (1.1), выражаются через его правую часть. Вычислим их, используя формулы (2.21), (2.22) и уравнение (1.1).

Для получения приращения $\Delta \mathbf{y}(t)$ проинтегрируем уравнение (1.1) в интервале $t, t + \Delta t$ и представим результат интегрирования

в виде

$$\Delta y(t) = \int_t^{t+\Delta t} [a^{(s)}(y, \tau) + B^{(s)}(y, \tau) u(\tau)] d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F^{(s)}(y, \tau) \xi(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

В выражении (2.28) выделен интеграл от подынтегральной случайной функции, содержащей белый шум. Такой интеграл называется *стохастическим*. Для него существуют различные определения и соответствующие вычислительные процедуры [54, 61, 62, 74]. Наиболее распространенными являются две формы: *несимметризованная* Ито [74] и *симметризованная* Стратоновича [61]. В несимметризованной форме Ито случайная функция $F^{(s)}(y, t)$ и белый шум $\xi(t)$ для одного и того же момента времени независимы, по определению интеграла [54, 61, 74], и поэтому математическое ожидание интеграла равно нулю. В симметризованном представлении стохастического интеграла в форме Стратоновича $F^{(s)}(y, t)$ и $\xi(t)$ зависимы и математическое ожидание интеграла не равно нулю.

Для первого не стохастического интеграла (2.28) при малом Δt можно применить теорему о среднем. Тогда запишем (2.28) в виде

$$\Delta y(t) = [a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t) u(t)] \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} F^{(s)}(y, \tau) \xi(\tau) d\tau. \quad (2.29)$$

Рассмотрим обе формы представления стохастического интеграла. Полагая стохастический интеграл в (2.29) представленным в несимметризованной форме, подставим его в (2.21), (2.22). После применения операции математического ожидания при фиксированных $y(t)$, $s(t)$ и переходе к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получим для вектора сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$ и матрицы диффузии $D^{(s)}(y, t)$ в несимметризованной форме следующие формулы:

$$\alpha_*^{(s)}(y, t) = a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t) u, \quad (2.30)$$

$$D_*^{(s)}(y, t) = F^{(s)}(y, t) G(t) F^{(s)T}(y, t), \quad (2.31)$$

где $M_s[\xi(t) | y, t] = 0$, $M[\xi(t) \xi^T(t') | y, t] = G(t) \delta(t - t')$; $G(t)$ — матрица интенсивностей гауссовского белого шума $\xi(t)$.

Для симметризованного стохастического интеграла вычисление среднего значения значительно сложнее, так как функции $F^{(s)}(y, t)$ и $\xi(t)$ зависимы между собой. Однако доказано, что при вычислении симметризованных стохастических интегралов справедливы обычные правила интегрирования и дифференцирования [54, 61, 62]. Этим утверждением можно воспользоваться для организации вычислений симметризованных стохастических интегралов. Такое утверждение формально справедливо только

по отношению к симметризованным стохастическим интегралам. Преобразуем стохастический интеграл, входящий в (2.31), к более простым интегралам, вычисление которых не представляет трудностей. Для простоты и наглядности выкладки проведем в координатной форме. Для компонента приращения $\Delta y_p(t)$ формула (2.31) принимает вид

$$\Delta y_p(t) = \left[a_p^{(s)}(y, t) + \sum_{i=1}^{n_y} B_{pi}^{(s)}(y, t) u_i(t) \right] \Delta t + \\ + \sum_{i=1}^{n_y} \int_t^{t+\Delta t} F_{pi}^{(s)}(y, \tau) \xi_i(\tau) d\tau \quad (p = \overline{1, n_y}). \quad (2.32)$$

На малом интервале $t < \tau < t + \Delta t$ представим функцию $F_p^{(s)}(y, \tau)$ рядом в окрестности точки (y, t) с точностью до линейного члена малости Δt , применив линейаризацию, если функция дифференцируема, или статистическую линейаризацию, если она недифференцируема. Предполагая функцию $F_{pi}^{(s)}(y, t)$ дифференцируемой, имеем

$$F_{pi}^{(s)}(y, \tau) = F_{pi}^{(s)}(y, t) + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial y_j} \int_t^{\tau} dy_j + \frac{\partial F_{pi}^{(s)}}{\partial t} \int_t^{\tau} dt'. \quad (2.33)$$

Дифференциал dy_j получим из уравнения (1.1) в виде

$$dy_j = [a_j^{(s)}(y, t) + \sum_{q=1}^{n_y} B_{jq}^{(s)}(y, t) u_q(t) + \sum_{q=1}^{n_y} F_{jq}^{(s)}(y, t) \xi_q(t)] dt. \quad (2.34)$$

Подставляя последовательно (2.34) в (2.33) и в (2.32), получим

$$\Delta y_p(t) = \left[a_p^{(s)}(y, t) + \sum_{i=1}^{n_y} B_{pi}^{(s)}(y, t) u_i(t) \right] \Delta t + \\ + \sum_{i=1}^{n_y} \left\{ F_{pi}^{(s)}(y, t) \int_t^{t+\Delta t} \xi_i(\tau) d\tau + \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial t} \int_t^{t+\Delta t} \left[\xi_i(\tau) \int_t^{\tau} dt' \right] d\tau + \right. \\ + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial y_j} \int_t^{t+\Delta t} \left[\xi_i(\tau) \int_t^{\tau} \left(a_p^{(s)}(y, \tau') + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{n_y} B_{pi}^{(s)}(y, \tau') u_i(\tau') \right) d\tau' \right] d\tau + \\ \left. + \sum_{q,j=1}^{n_y} \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial y_j} \int_t^{t+\Delta t} \left[\xi_i(\tau) \int_t^{\tau} \xi_q(\tau') F_{qj}^{(s)}(y, \tau') d\tau' \right] d\tau \right\}. \quad (2.35)$$

Вычислим условное математическое ожидание приращения при

фиксированных s, y, t :

$$M[\Delta y_p | s, y, t] = \left[a_p^{(s)}(y, t) + \sum_{i=1}^{n_y} B_{pi}^{(s)}(y, t) u_i(t) \right] \Delta t + \\ + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i,j,q=1}^{n_y} \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial y_j} G_{iq}(t) F_{jq}^{(s)}(y, t). \quad (2.36)$$

Разделив правую и левую части (2.36) на Δt и устремив $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\alpha_p^{(s)}(y, t) = a_p^{(s)}(y, t) + \sum_{i=1}^{n_y} B_{pi}^{(s)}(y, t) u_i(t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j,q=1}^{n_y} \frac{\partial F_{pi}^{(s)}(y, t)}{\partial y_j} G_{iq}(t) F_{jq}^{(s)}(y, t) \quad (p = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}). \quad (2.37)$$

Но последний член в (2.37) представляет собой p -й компонент матрицы-столбца [54]

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T F^{(s)}(y, t) G(t) F^{(s)T}(x, t) \right]_{x=y}.$$

Следовательно, для вектора сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$ в симметризованной форме получим

$$\alpha^{(s)}(y, t) = a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t) u(t) + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T F^{(s)}(y, t) G(t) F^{(s)T}(x, t) \right]_{x=y} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (2.38)$$

Вычислим условное математическое ожидание второго момента приращений $\Delta y_p \Delta y_k$, используя формулу (2.25):

$$M[\Delta y_p \Delta y_k | s, y, t] = \sum_{i,r=1}^{n_y} F_{pi}^{(s)}(y, t) F_{kr}^{(s)}(y, t) G_{ir}(t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив правую и левую части этой формулы на Δt и устремив $\Delta t \rightarrow 0$, получим компонент матрицы диффузии

$$D_{pk}^{(s)}(y, t) = \sum_{i,r=1}^{n_y} F_{pi}^{(s)}(y, t) F_{kr}^{(s)}(y, t) G_{ir}(t) \quad (p, k = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}). \quad (2.39)$$

В матричной форме формула (2.39) принимает вид

$$D^{(s)}(y, t) = F^{(s)}(y, t) G(t) F^{(s)T}(y, t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (2.40)$$

Таким образом, матрицы диффузии в симметризованной и не-симметризованной формах совпадают, а формулы для вектора сноса различные. Следует заметить, что использование стохастических интегралов и дифференциалов в форме Ито с после-

дующим преобразованием к симметризованной форме приводит к тем же результатам.

Для многомерной непрерывнозначной марковской разрывной последовательности, описываемой уравнением (1.3), локальные характеристики $\Delta\alpha^{(s)}(y, k)$ и $\Delta D^{(s)}(y, k)$ при малом интервале дискретности вычисляются по формулам (2.26) и (2.27). Подставляя в эти формулы $\Delta y(k)$ из (1.3), получим при интерпретации стохастического интеграла в симметризованной форме

$$\Delta\alpha^{(s)}(y, k) = T_{\Pi} [a^{(s)}(y, k) + B^{(s)}(y, k) u(k)] + \\ + T_{\Pi} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T F^{(s)}(x, k) G(k) F^{(s)T}(y, k) \right]_{x=y}, \quad (2.41)$$

$$\Delta D^{(s)}(y, k) = T_{\Pi} [F^{(s)}(y, k) G(k) F^{(s)T}(y, k)] \quad (s = \overline{1, n})$$

и в несимметризованной форме

$$\Delta\alpha_*^{(s)}(y, k) = T_{\Pi} [a^{(s)}(y, k) + B^{(s)}(y, k) u(k)], \\ \Delta D_*^{(s)}(y, k) = T_{\Pi} F^{(s)}(y, k) G(k) F^{(s)T}(y, k). \quad (2.42)$$

§ 2.5. Дискретный марковский процесс смены структуры

Дискретная функция $s(t)$ независимой распределенной смены структуры (состояния) представляет собой скалярный дискретный случайный процесс. При непрерывном изменении времени этот процесс скачкообразно в случайные моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots$) может принимать любые значения натурального ряда чисел $s = \overline{1, n}$. Число структур конечно и равно n , а смена их происходит по случайному закону. На рис. 2.1 изображен такой процесс. Из физической сущности случайного процесса $s(t)$ смены состояний вытекает, что он обладает свойством ординарности и отсутствием последействия. Это означает, что за бесконечно малый интервал времени Δt вероятность смены состояния более одного раза является малой величиной $o(\Delta t)$ порядка не ниже $(\Delta t)^2$. Такое предположение вполне оправдано, так как оно учитывает инерционность перехода, всегда имеющую место в реальных физических процессах. Такой процесс является дискретным марковским и имеет пуассоновский закон распределения моментов скачка (смены структуры).

Дискретный марковский скалярный процесс $s(t)$ характеризуется вероятностью $p^{(s)}(t)$ состояния и вероятностью $p^{sk}(t|t')$ перехода из состояния k в состояние s :

$$p(s, t) = p^{(s)}(t) = \text{Вер} [s(t) = s, t],$$

$$p^{sk}(s, t|k, t') = \text{Вер} [s(t) = s, t | s(t') = k, t'].$$

Вероятность перехода удовлетворяет *уравнению Маркова*, которое для процесса $s(t)$ принимает вид

$$p^{(sk)}(s, t + \Delta t | k, t_0) = \sum_{r=1}^n p^{(sr)}(s, t + \Delta t | r, t) p^{(rk)}(r, t | k, t_0), \\ t > t_0, \quad \Delta t > 0. \quad (2.43)$$

Но для ординарных марковских процессов вероятности переходов при малых временных интервалах Δt выражаются через функции интенсивностей $\nu^{(sk)}(t)$, представляющие собой производные по времени от вероятностей переходов. Так, вероятность того, что система останется в состоянии s , следующая:

$$p^{(ss)}(s, t + \Delta t | s, t) = 1 - \nu^{(ss)}(t) \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.44)$$

Вероятность перехода в состояние r из состояния s и из r в s за малый интервал времени Δt выражается так:

$$p^{(rs)}(r, t + \Delta t | s, t) = \nu^{(rs)}(t) \Delta t + o(\Delta t) \quad (r \neq s), \\ p^{(sr)}(s, t + \Delta t | r, t) = \nu^{(sr)}(t) \Delta t + o(\Delta t) \quad (r \neq s). \quad (2.45)$$

Все интенсивности $\nu^{(rs)}(t) \geq 0$, т. е. неотрицательны по физическому смыслу. Вероятности переходов $p^{(rs)}(r, t | s, t')$ нормированы к единице при $p^{(rs)}(r, t | s, t') \geq 0$:

$$\sum_{s=1}^n p^{(rs)}(r, t | s, t') = 1, \quad \sum_{r=1}^n p^{(sr)}(s, t | r, t') = 1. \quad (2.46)$$

Кроме того, справедливы условия

$$p^{(sr)}(s, t | r, t) = \delta_{sr}, \quad p^{(rs)}(r, t | s, t) = \delta_{rs},$$

где δ_{rs} — функция Кронекера.

На основании (2.46) для (2.44), (2.45) получим

$$\nu^{(ss)}(t) = \sum_{r=1, r \neq s}^n \nu^{(rs)}(t). \quad (2.47)$$

Подставляя формулы (2.44) и (2.45) в правую часть уравнения (2.43) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим *прямые уравнения Колмогорова* для вероятности перехода из состояния k в состояние s :

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{(sk)}(s, t | k, t_0) = -\nu^{(ss)}(t) p^{(sk)}(s, t | k, t_0) + \\ + \sum_{r=1, r \neq s}^n \nu^{(sr)}(t) p^{(rk)}(r, t | k, t_0) \quad (k, s = \overline{1, n}). \quad (2.48)$$

Уравнения системы (2.48) линейны и имеют единственное нетривиальное решение, определяющее вероятность перехода для дискретного марковского процесса $s(t)$ при заданных $\nu^{(sr)}(t)$ и заданных начальных условиях. Для дискретного марковского

процесса $s(t)$ наряду с (2.48) справедлива также обратная система уравнений Колмогорова. Для ее получения следует записать уравнение Маркова (2.43), выбрав промежуточный момент времени $t_0 + \Delta t$ близким к начальному t_0 . После преобразования, аналогичных тем, которые были проведены при выводе уравнений (2.48), получим обратную или сопряженную систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_0} p^{(sk)}(s, k | k, t_0) = v^{(hk)}(t_0) p^{(sk)}(s, t | k, t_0) - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t_0) p^{(sk)}(r, t | k, t_0) \quad (s, k = \overline{1, n}), \quad (2.49)$$

которая при $p^{(sr)}(s, t | r, t) = \delta_{sr}$ имеет однозначное решение.

Дискретный процесс $s(t)$ однороден, если вероятности переходов $p^{(sr)}(s, t | r, t_0)$ зависят только от времени $\tau = t - t_0$, т. е. $p^{(sr)}(s, t | r, t_0) = p^{(sr)}(s | r, \tau)$. Для однородного процесса интенсивности переходов $v^{(sr)}(t) = \text{const}$, а уравнения (2.48), (2.49) принимают вид

$$\frac{d}{d\tau} p^{(sk)}(s | k, \tau) = -v^{(ss)} p^{(sk)}(s | k, \tau) + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)} p^{(sk)}(r | k, \tau) \quad (k, s = \overline{1, n}). \quad (2.50)$$

Если существует установившийся режим для рассматриваемого марковского дискретного процесса, то предельные значения вероятностей переходов $p^{(ks)}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$-v^{(ss)} p^{(sk)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)} p^{(rk)} = 0, \quad \sum_{r=1}^n p^{(sr)} = 1. \quad (2.51)$$

Для дискретного марковского процесса $s(t)$, имеющего n дискретных значений, вероятность состояния можно определить по формуле

$$p^{(s)}(t) = \sum_{h=1}^n p^{(hk)}(k, t_0) p^{(sk)}(s, t | k, t_0). \quad (2.52)$$

Вероятность состояния $p^{(s)}(t)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое получается следующим образом. Умножим уравнения (2.48) на $\underline{p^{(k)}}(t_0) = p^{(k)}(k, t_0)$ и просуммируем по всем состояниям $k = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p^{(k)}(k, t_0) \frac{\partial}{\partial t} p^{(s,k)}(s, t | k, t_0) = \\ = -v^{(ss)}(t) \sum_{k=1}^n p^{(k)}(k, t_0) p^{(s,k)}(s, t | k, t_0) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \sum_{k=1}^n p^{(k)}(k, t_0) p^{(rk)}(r, t | k, t_0) \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Меняя местами дифференцирование по t и суммирование по k и учитывая формулы (2.47) и (2.52), из (2.53) получаем уравнения Колмогорова

$$\frac{d}{dt} p^{(s)}(t) = -v^{(ss)}(t) p^{(s)}(t) + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) p^{(r)}(t) \quad (s = \overline{1, n}) \quad (2.54)$$

при начальном условии $p^{(s)}(t_0) = p_0^{(s)} \quad (s = \overline{1, n})$.

Установившиеся равновесные значения вероятностей $p^{(s)}$ рассматриваемого дискретного процесса при $t \rightarrow \infty$ получаются из (2.54) приравниванием нулю производных:

$$-v^{(ss)} p^{(s)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)} p^{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)} = v^{(ss)}. \quad (2.55)$$

Уравнения (2.54) при $s = \overline{1, n}, \sum_{s=1}^n p^{(s)} = 1$ полностью определяют установившееся значение $p^{(s)}$, если заданы $v^{(sr)} \quad (r, s = \overline{1, n})$.

Дискретный процесс $s(k)$ смены структуры может представлять собой скалярную дискретную марковскую простую цепь (см. рис. 2.2). Такая интерпретация имеет место, если система описывается разностными или итерационными уравнениями с числом дискретности по времени T_{Π} : $t_k = kT_{\Pi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$. Такой процесс также характеризуется двумя вероятностями: состояния $p^{(s)}(k)$ и перехода $p^{(sk)}(s, h|k, l) \quad (h, l = 0, 1, 2, \dots)$. Для этих вероятностей справедливы уравнение (2.43), формулы (2.44) и (2.45), а также (2.46) и (2.47), которые должны быть записаны соответственно для моментов времени $t_k = kT_{\Pi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Вместо дифференциальных уравнений (2.46), (2.49), (2.50), (2.54) могут быть использованы итерационные формулы для определения $p^{(s)}(k)$ и $p^{(sk)}(s, h|k, l)$, которые получаются путем их дискретизации методом Эйлера или выводятся непосредственно. В последнем случае надо воспользоваться уравнением Маркова (2.43) и формулами (2.44), (2.45). В частности, уравнение для $p^{(s)}(h)$ имеет вид

$$p^{(s)}(h+1) = p^{(s)}(h) - v_*^{(ss)}(h) p^{(s)}(h) + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(rs)}(h) p^{(r)}(h) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (2.56)$$

Итерационное уравнение для $p^{(sk)}(s, h|k, l)$ следующее:

$$p^{(sk)}(s, h+1|k, l) = p^{(sk)}(s, h|k, l) - v_*^{(ss)}(s, h|k, l) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(sr)}(h) p^{(rh)}(r, h|k, l) \quad (s, k = \overline{1, n}). \quad (2.57)$$

В формулах (2.56) и (2.57) введено обозначение

$$v_*^{(sr)}(h) = T_{\Pi} v^{(sr)}(h).$$

§ 2.6. Дискретный условный марковский процесс смены структуры с распределенными переходами

Для динамической системы с распределенными зависимыми от ее состояния переходами от одной структуры к другой случайный дискретный процесс $s(t)$ должен учитывать статистическую зависимость между процессом $y(t)$ и моментом скачка. Предполагается, что взаимодействие между ними не обладает последствием. Это выражается в том, что статистические характеристики процесса $s(t)$ смены состояния в произвольный момент времени t зависят от характеристик процесса $y(t)$ в тот же момент времени и не зависят от предыдущего характера его изменения. Указанное предположение приводит к тому, что моменты времени смены состояний должны подчиняться определенным закономерностям. Это, конечно, накладывает ограничения на возможности применения теории марковских процессов со случайной структурой для описания некоторых реальных ситуаций. В ряде задач практическим выходом из этого затруднения может быть расширение размерности состояний (структур) процесса.

Таким образом, возникает представление об условном марковском дискретном процессе $s(t)$ с интенсивностями перехода $\nu^{(sk)}(y, t)$, зависящими от вектора фазовых координат в данный момент времени $y(t)$. Зависимость интенсивности переходов $\nu^{(sk)}(y, t)$ от $y(t)$ может иметь различный характер. Она определяется физическим существом задачи.

Рассмотренный в предыдущем параграфе дискретный процесс $s(t)$ с независимой пуассоновской сменой структуры является частным случаем условного марковского процесса с распределенными переходами при $\nu^{(sr)}(y, t) = \nu^{(sr)}(t)$.

Условный марковский дискретный процесс $s(t)$ имеет тот же вид, что и представленный на рис. 2.1, и может быть описан условными вероятностями состояния и перехода из состояния k в состояние s при фиксированном $y(t)$

$$p(s, t|y) = p^{(s)}(t|y) = \text{Вер}[s(t) = s, t|y],$$

$$p^{(sk)}(s, t|k, t', y) = \text{Вер}[s(t) = s | s(t') = k, y].$$

Для условных вероятностей $p^{(sk)}(s, t|k, t', y)$ перехода также справедливо уравнение Маркова типа (2.43)

$$p^{(sk)}(s, t + \Delta t | k, t_0, y) =$$

$$= \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(sr)}(s, t + \Delta t | r, t, y) p^{(rk)}(r, t | k, t_0, y), \quad (2.58)$$

$$t > t_0, \quad \Delta t > 0.$$

Условные вероятности переходов для малых временных интервалов Δt можно представить через условные интенсивности

переходов $v^{(ks)}(y, t)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} p^{(ss)}(s, t + \Delta t | s, t, y) &= 1 - v^{(ss)}(y, t) \Delta t + o(\Delta t), \\ p^{(rs)}(r, t + \Delta t | s, t, y) &= v^{(rs)}(y, t) \Delta t + o(\Delta t), \\ p^{(sr)}(s, t + \Delta t | r, t, y) &= v^{(sr)}(y, t) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Все условные интенсивности переходов $v^{(sr)}(y, t) \geq 0$, а вероятности переходов при $r, s = \overline{1, n}$ и фиксированном y нормированы к единице. В силу сказанного справедлива формула

$$v^{(ss)}(y, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y, t). \quad (2.60)$$

Подставляя формулы (2.59) в уравнение (2.58) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим обобщенное уравнение Колмогорова для условных вероятностей переходов при фиксированном t_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{(sk)}(s, t | k, t_0, y)}{\partial t} &= -v^{(ss)}(y, t) p^{(sk)}(s, t | k, t_0, y) + \\ &+ \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(y, t) p^{(rk)}(r, t | k, t_0, y) \quad (s, k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Для дискретного условного марковского процесса $s(t)$, имеющего n значений, условную вероятность состояния $s(t)$ можно определить по формуле

$$p^{(s)}(t | y) = \sum_{k=1}^n p^{(kj)}(t | y) p^{(sk)}(s, t | k, t_0, y) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (2.62)$$

Условная вероятность состояния $p^{(s)}(t | y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое получается из (2.61), если умножить его на $p^{(kj)}(t_0, y)$ и просуммировать по всем $k = \overline{1, n}$. В результате также получим обобщенное уравнение Колмогорова для условной вероятности $p^{(s)}(t | y)$ при фиксированном $y(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(s)}(t | y)}{dt} &= -v^{(ss)}(y, t) p^{(s)}(t | y) + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(y, t) p^{(r)}(t | y) \\ &\quad (s = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

при начальном условии $p^{(s)}(t_0 | y_0) = p_0^{(s)}$.

Безусловная вероятность состояния (структуры) $p^{(s)}(t)$ выражается формулой через $p^{(s)}(t | y)$:

$$p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{(s)}(t | y) f(y, t) dy, \quad f(y, t) = \sum_{s=1}^n f(y, s, t). \quad (2.64)$$

Можно и другим путем получить уравнение для непосредственного определения вероятности состояния $p^{(s)}(t)$. Это будет показано в следующей главе.

Для дискретной условной марковской цепи $s(h)$, имеющей вид, показанный на рис. 2.2, справедливы обобщенные итерационные формулы типа (2.56) и (2.57), записанные относительно $p^{(s)}(h|y)$ и $p^{(sk)}(s, h+1|k, l, y)$ при $v^{(rs)}(y, h)$ ($h=0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} & p^{(sk)}(s, h+1|k, l, y) = p^{(sk)}(s, h|k, l, y) - \\ & - p^{(sk)}(s, h|k, l, y) \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(rs)}(y, h) + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(sr)}(y, h) p^{(sk)}(s, h|k, l, y) \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} p^{(s)}(h+1, y) &= p^{(s)}(h|y) - p^{(s)}(h|y) \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(rs)}(y, h) + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(sr)}(y, h) p^{(r)}(h|y) \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Здесь введено обозначение $v_*^{(sr)}(y, h) = T_H v^{(sr)}(y, h)$.

Безусловная вероятность состояния $p^{(s)}(h)$ может быть определена из соотношения

$$p^{(s)}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{(s)}(h|y) f(y, h) dy, \quad f(y, h) = \sum_{s=1}^n f(y, s, h). \quad (2.67)$$

В следующей главе будет получена другая рекуррентная формула для определения $p^{(s)}(h)$, более приемлемая для проведения вычислений, так как определение $p^{(s)}(h)$ связано с параллельным вычислением $f(y, h)$.

§ 2.7. Дискретный условный марковский процесс смены структуры с сосредоточенными переходами

В динамических системах со случайной структурой с сосредоточенными переходами случайный дискретный процесс $s(t)$ также будем предполагать условным марковским с конечным числом состояний n . Однако здесь взаимодействие между реализациями процесса $y(t)$ и моментом смены структуры имеет функциональный характер, т. е. смена состояния s на состояние r происходит при достижении вектором $y(t)$ некоторой границы $y^{(rs)}$. Марковский процесс смены структуры в данном случае может быть описан условной функцией интенсивности переходов $v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t)$, зависящей от вектора фазовых координат $y(t)$ и вектора $y^{(rs)}$, характеризующего границу. Вид функции $v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t)$ зависит от конкретной границы $y^{(rs)}$ фазового пространства и характера перехода (полная, частичная смена структуры, на жесткой границе или в области). Наиболее типичный вариант такого процесса — полная смена состояния на границе $y^{(rs)}$, т. е. полное поглощение реализаций предыдущего процесса.

В следующей главе будут рассмотрены вероятностные характеристики изучаемых процессов и определен конкретный вид функций $v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t)$.

При известной интенсивности перехода $v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t)$ дискретного условного марковского процесса $s(t)$, имеющего тот же вид, что и на рис. 2.1, полностью справедливы математические выкладки предыдущего параграфа с заменой $v^{(rs)}(y, t)$ на $v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t)$. В результате условные функции вероятности состояния $p^{(s)}(t, y)$ и перехода $p^{(sh)}(s, t | k, t_0, y)$ при фиксированном $y(t)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial p^{(sh)}(s, t | k, t_0, y)}{\partial t} = -p^{(sh)}(s, t | k, t_0, y) \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(y, y^{(sr)}, t) p^{(rk)}(r, t | k, t_0, y) \quad (s, k = \overline{1, n}), \quad (2.68)$$

$$\frac{dp^{(s)}(t | y)}{dt} = -p^{(s)}(t | y) \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y, y^{(rs)}, t) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(y, y^{(sr)}, t) p^{(r)}(t | y) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (2.69)$$

Для определения $p^{(s)}(t)$ можно использовать формулу (2.64).

Для дискретной условной марковской цепи $s(h)$ соответственно имеют место формулы

$$p^{(sh)}(s, h + 1 | k, t, y) = p^{(sh)}(s, h | k, l, y) - \\ - p^{(sh)}(s, h | k, l, y) \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(rs)}(y, y^{(rs)}, h) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(sr)}(y, y^{(sr)}, h) p^{(rk)}(r, h | k, l, y), \quad (2.70)$$

$$p^{(s)}(h + 1 | y) = p^{(s)}(h | y) - p^{(s)}(h | y) \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(rs)}(y, y^{(rs)}, h) + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n v_*^{(sr)}(y, y^{(sr)}, h) p^{(r)}(h | y) \quad (s, k = \overline{1, n}). \quad (2.71)$$

Для определения $p^{(s)}(h)$ служит формула (2.67).

Поскольку для определения $p^{(s)}(t)$ и $p^{(s)}(h)$ требуется знание $f(y, s, t)$, то приведенные формулы неудобны. В следующей главе будут рассмотрены уравнения для определения функций $f(y, s, t)$ и $f^{(s)}(y, t)$ и получены уравнения для определения $p^{(s)}(t)$, а также рекуррентные формулы для $p^{(s)}(h)$.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 3.1. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для многомерного марковского процесса

Многомерный (векторный) марковский процесс, который описывает динамику стохастической системы типа (1.1) при фиксированном s , т. е. без смены структуры, полностью характеризуется двумя функциями распределения: функцией плотности вероятности распределения вектора $y(t)$ фазовых координат при фиксированном моменте времени $f(y, t)$ и функцией плотности вероятности перехода из фиксированной фазовой точки y^* в момент t_1 в любую другую фазовую точку y в момент t : $f(y, t|y^*, t_1)$. Эти функции плотности вероятности удовлетворяют уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова, которое может быть записано в различной форме. Приведем эти уравнения без вывода, который можно найти, например, в [32, 66].

Так, уравнение для функции $f(y, t|y^*, t_1)$ имеет вид

$$\frac{\partial f(y, t|y^*, t_1)}{\partial t} = -\nabla_y^T [\alpha(y, t) f(y, t|y^*, t_1)] + \\ + \frac{1}{2} \nabla_y^T \{ \nabla_y^T [D^T(y, t) f(y, t|y^*, t_1)] \}^T, \quad (3.1)$$

где $\alpha(y, t)$ — вектор сноса; $D(y, t)$ — матрица диффузии; $\nabla_y = \text{grad}_y$ — вектор-столбец по компонентам y . Решение этого уравнения должно быть неотрицательной нормированной к единице функцией в бесконечной области и удовлетворять начальному условию

$$f(y, t_1|y^*, t_1) = \delta(y - y^*). \quad (3.2)$$

Это решение при $f(\pm\infty, t|y^*, t_1) = 0$ и начальном условии (3.2) называется *фундаментальным* решением многомерной задачи Коши для уравнения (3.1).

Уравнение (3.1) можно записать также в другой форме:

$$\frac{\partial f(y, t|y^*, t_1)}{\partial t} = -\nabla_y^T [\alpha(y, t) f(y, t|y^*, t_1)] + \\ + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \nabla_y \nabla_y^T [D(y, t) f(y, t|y^*, t_1)] \}, \quad (3.3)$$

где tr — след матрицы.

Наконец, употребительна из-за краткости написания еще следующая форма [23, 27, 50, 77]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1), \quad (3.4)$$

где

$$\pi(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1) = \alpha(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1) - \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [\mathbf{D}^T(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1)] \}^T$$

— вектор плотности потока вероятности $f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1)$ перехода, а $\operatorname{div} = \nabla_{\mathbf{y}}^T$.

Для функции $f(\mathbf{y}, t)$ уравнения имеют вид (3.4), но должны интегрироваться при другом начальном условии. Запишем уравнение для функции $f(\mathbf{y}, t)$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{y}}^T [\alpha(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{y}}^T \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [\mathbf{D}^T(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] \}^T. \quad (3.5)$$

Начальное условие при интегрировании уравнения (3.5) должно быть задано в форме начальной функции плотности вероятности $f(\mathbf{y}_0, t_0)$. Уравнение (3.5) можно записать также в форме

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{y}}^T [\alpha(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}}^T [\mathbf{D}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] \}. \quad (3.6)$$

В дальнейшем будет использована более короткая форма записи:

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(\mathbf{y}, t), \quad (3.7)$$

где

$$\pi(\mathbf{y}, t) = \alpha(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [\mathbf{D}^T(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] \}^T. \quad (3.8)$$

Правая часть в (3.7) интерпретируется, как дивергенция вектора $\pi(\mathbf{y}, t)$ плотности потока вероятности распределения фазовых координат. Вектор $\pi(\mathbf{y}, t)$ плотности потока вероятности описывает количество вероятности, проходящей в направлении этого вектора в единицу времени. Каждый компонент $\pi_k(\mathbf{y}, t)$ этого вектора характеризует количество вероятности, проходящей в положительном направлении координаты y_k n_y -мерного пространства в единицу времени через единицу поверхности. Компоненты $\pi_k(\mathbf{y}, t)$ имеют вид

$$\pi_k(\mathbf{y}, t) = \alpha_k(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [D_k^T(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] \}^T, \quad (3.9)$$

где $D_k(\mathbf{y}, t)$ — k -я строка матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t)$.

Приведем еще часто употребляющуюся форму записи уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = & - \sum_{k=1}^{n_y} \frac{\partial}{\partial y_k} [\alpha_k(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n_y} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} [D_{kl}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\alpha_h(\mathbf{y}, t)$ — компоненты вектора сноса $\alpha(\mathbf{y}, t)$; $D_{hl}(\mathbf{y}, t)$ — компоненты матрицы диффузии $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t)$.

Отметим, что знание функций плотности вероятности перехода $f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1)$ и плотности вероятности $f(\mathbf{y}^*, t_1)$ дает возможность определить функцию $f(\mathbf{y}, t)$ по формуле

$$f(\mathbf{y}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1) f(\mathbf{y}^*, t_1) d\mathbf{y}^*. \quad (3.11)$$

Кроме того, плотность вероятности перехода векторного непрерывного марковского процесса удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского — Колмогорова — Чепмена при $t_1 < t' < t$

$$f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}^*, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') f(\mathbf{y}', t' | \mathbf{y}^*, t_1) d\mathbf{y}'. \quad (3.12)$$

Для непрерывнозначной марковской последовательности (дискретного марковского процесса с непрерывными значениями вектора $\mathbf{y}(k)$ фазовых координат) функции $f(\mathbf{y}, h)$ и $f(\mathbf{y}, h | \mathbf{y}^*, k)$ определяются с помощью приближенных рекуррентных процедур [28]. Так, уравнение (3.1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}, h+1 | \mathbf{y}^*, k) = \\ = f(\mathbf{y}, h | \mathbf{y}^*, k) - \nabla_{\mathbf{y}}^T [\Delta \alpha(\mathbf{y}, h) f(\mathbf{y}, h | \mathbf{y}^*, k)] + \\ + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{y}}^T \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [\Delta \mathbf{D}^T(\mathbf{y}, h) f(\mathbf{y}, h | \mathbf{y}^*, k)] \}^T, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\Delta \alpha(\mathbf{y}, h)$ — приращение вектора сноса; $\Delta \mathbf{D}(\mathbf{y}, h)$ — приращение матрицы диффузии на шаге $\Delta t = T_{\pi}$.

Приращения вектора сноса $\Delta \alpha(\mathbf{y}, h) = T_{\pi} \alpha(\mathbf{y}, h)$ и матрицы диффузии $\Delta \mathbf{D}(\mathbf{y}, h) = T_{\pi} \mathbf{D}(\mathbf{y}, h)$ могут быть определены также по формулам [32]

$$\begin{aligned} \Delta \alpha(\mathbf{y}, h) &= M[\{\mathbf{y}(h+1) - \mathbf{y}(h)\} | \mathbf{y}, h], \\ \Delta \mathbf{D}(\mathbf{y}, h) &= M[\{\mathbf{y}(h+1) - \mathbf{y}(h)\} \{\mathbf{y}(h+1) - \mathbf{y}(h)\}^T | \mathbf{y}, h]. \end{aligned}$$

Правая часть этих выражений может быть записана также в другом виде, если воспользоваться обозначениями, принятыми в (3.3), (3.4) и (3.6), (3.7).

Рекуррентные формулы (3.12), (3.13) являются дискретными аналогами уравнений (3.1) и (3.5) соответственно при дискретизации времени. Этими формулами можно пользоваться при организации вычислений функций распределения после дискретизации правой части уравнения (1.1) по переменным y_i ($i = 1, n_y$). По существу, следует применить стандартную программу численного интегрирования уравнения (3.1) или (3.5) в частных производных.

§ 3.2. Уравнение Пугачева для многомерного марковского процесса

Многомерный векторный марковский процесс полностью описывается заданием двух характеристических функций

$$g(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f(y, t) dy, \quad (3.14)$$

$$g(\lambda, t | y^*, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f(y, t | y^*, t_1) dy.$$

Эти характеристические функции многомерного марковского процесса удовлетворяют интегродифференциальному уравнению Пугачева [52, 54]. Для характеристической функции перехода $g(\lambda, t | y^*, t_1)$ это уравнение следующее:

$$\frac{\partial g(\lambda, t | y^*, t_1)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda^T D(y, t) \lambda + i\lambda^T \alpha(y, t) \right] e^{i\lambda^T y} f(y, t | y^*, t_1) dy, \quad (3.15)$$

где λ — вектор-столбец переменных характеристической функции. Уравнение (3.15) следует интегрировать при начальном условии

$$g(\lambda, t | y^*, t_1) = e^{i\lambda^T y^*}.$$

Аналогичное уравнение существует для первой характеристической функции $g(\lambda, t)$:

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda^T D(y, t) \lambda + i\lambda^T \alpha(y, t) \right] e^{i\lambda^T y} f(y, t) dy \quad (3.16)$$

при начальном условии $g(\lambda, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t_0) e^{i\lambda^T y} dy$. Интегродифференциальные уравнения для характеристических функций в ряде задач удобнее, так как при их применении не требуется дифференцируемости функций $\alpha(y, t)$ и $D(y, t)$.

Для непрерывнозначной марковской последовательности справедливы итерационные формулы, определяющие характеристические функции

$$g(\lambda, h+1 | y^*, l) = g(\lambda, h | y^*, l) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda^T \Delta D(y, h) \lambda + i\lambda^T \Delta \alpha(y, h) \right] e^{i\lambda^T y} f(y, h | y^*, l) dy, \quad (3.17)$$

$$g(\lambda, h+1) = g(\lambda, h) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda^T \Delta D(y, h) \lambda + i\lambda^T \Delta \alpha(y, h) \right] e^{i\lambda^T y} f(y, h) dy. \quad (3.18)$$

§ 3.3. Функции плотности вероятности разрывных процессов при распределенных переходах

В динамических системах со случайной структурой с распределенными переходами смена состояния происходит в любой случайный момент времени во всем фазовом пространстве. Как было показано в гл. 2, в таких системах смена структуры описывается дискретным процессом $s(t)$ или дискретной цепью $s(k)$ с интенсивностями переходов, зависящими или не зависящими от фазовых координат. Это системы с независимой марковской и условной марковской распределенной сменой структуры.

Многомерный марковский разрывный процесс $\{y^T(t), s(t)\}^T$, описывающий динамику системы (1.1) с учетом смены структуры, характеризуется функциями распределения плотности вероятности $f(y, s, t)$ и плотности вероятности перехода $f(y, s, t | y^*, s, t_1)$. Получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции для разрывного процесса с распределенными переходами.

Рассматриваемый марковский разрывный процесс (1.1) в соответствии с определениями гл. 2 состоит из отрезков обычных марковских процессов на интервалах постоянства $s(t)$. На этих неперекрывающихся интервалах при фиксированном s справедливы уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для функций распределения плотностей вероятностей. Запишем такое уравнение для переходной функции плотности вероятности $f(y, s, t | y^*, s, t_1)$ при $s = \text{const}$ в форме (3.1):

$$\frac{\partial f(y, s, t | y^*, s, t_1)}{\partial t} = -\nabla_y^T [\alpha^{(s)}(y, t) | f(y, s, t | y^*, s, t_1)] + \\ + \frac{1}{2} \nabla_y^T \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t | y^*, s, t_1)] \}^T. \quad (3.19)$$

Для малых интервалов времени $\Delta t = t_1 - t$ с точностью до малых величин порядка не менее чем $(\Delta t)^2$ уравнение (3.19) представим следующим образом:

$$f(y, s, t_1 + \Delta t | y^*, s, t_1) = \delta(y - y^*) - \Delta t \nabla_y^T [\alpha^{(s)}(y^*, t_1) \delta(y - y^*)] + \\ + \frac{1}{2} \Delta t \nabla_y^T \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y^*, t_1) \delta(y - y^*)] \}^T, \quad (3.20)$$

где $\delta(y - y^*) = f(y, s, t_1 | y^*, s, t_1)$.

На малом интервале $\Delta t = t - t_1$ поведение рассматриваемого процесса со случайной структурой с учетом ее смены может быть различным. Часть реализаций процесса на этом интервале остается непрерывной и сохраняется, другая часть прекращает существование в связи с изменением состояния (структуры системы), и, наконец, существуют реализации, возникшие вновь в связи с обратным переходом из других состояний (рис. 3.1). В соответствии с дискретным марковским процессом $s(t)$, описанным в § 2.5 и 2.6 и характеризующим независимую пуассо-

мовскую и, следовательно, марковскую, а также условную марковскую смену структуры, вероятность перехода процесса $y(t)$ на интервале Δt из состояния s в состояние r характеризуется выражениями (2.44) и (2.59). Следует учесть еще, что реализации случайного процесса при переходе из состояния r в s могут в новой структуре иметь начальные условия $y(t)$, отличные от значений $y(t_1)$ в прежней структуре.

Пусть известна условная плотность вероятности $q^{(sr)}(y, t|y', t_1)$, отображающая закон распределения вероятности процесса $y(t)$ в момент t в состоянии $s(t)$ при условии, что в момент t_1 реализация процесса была $y(t_1)$ в состоянии r . Тогда вероятность перехода процесса $y(t)$ на интервале Δt из состояния r в s с учетом распределения начальных условий в новом состоянии вместо (2.44) и (2.59) запишем в форме

$$p^{(sr)}(s, t_1 + \Delta t | r, t_1) q^{(sr)}(y, t_1 + \Delta t | y', t_1) =$$

$$= \Delta t v^{(sr)}(y', t_1) q^{(sr)}(y, t_1 + \Delta t | y', t_1) + o(\Delta t). \quad (3.21)$$

Вероятность того, что процесс $y(t)$ остается в прежнем состоянии, в соответствии с (2.45), (2.47) и (2.59), (2.60) запишем в виде

$$p^{(ss)}(s, t_1 + \Delta t | s, t_1) = 1 - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y', t_1) + o(\Delta t). \quad (3.22)$$

Вероятность обратного перехода из состояния s в состояние r за интервал времени Δt можно записать в форме, аналогичной (3.21):

$$p^{(rs)}(r, t_1 + \Delta t | s, t_1) = v^{(rs)}(y, t_1) \Delta t + o(\Delta t). \quad (3.23)$$

Рассмотрим теперь изменение плотности вероятности $f(y, s, t)$ процесса со случайной структурой за малый интервал времени $\Delta t = t - t_1$ с учетом переходов из одного состояния в другое и обратно. В соответствии с (3.11) и с учетом (3.21) — (3.23) запишем связь между $f(y, s, t)$, $f(y^*, s, t_1)$:

$$f(y, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y^*, s, t_1) f(y, s, t | y^*, s, t_1) p^{(ss)}(s, t | s, t_1) dy^* +$$

$$+ \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y', s, t_1) p^{(sr)}(s, t | r, t_1) q^{(sr)}(y, t | y', t_1) dy'. \quad (3.24)$$

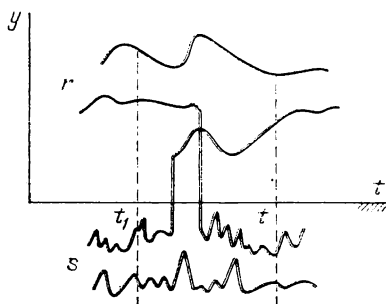


Рис. 3.1. Процесс с распределенными переходами

Подставив выражения для $p^{(rs)}$ и $p^{(sr)}$ из (3.22) и (3.23), получим

$$f(y, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y^*, s, t_1) f(y, s, t | y^*, s, t_1) \left[1 - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y^*, t_1) \right] dy^* + \\ + \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y', r, t_1) v^{(sr)}(y', t_1) q^{(sr)}(y, t | y', t_1) dy' + o(\Delta t). \quad (3.25)$$

Первое слагаемое в выражении (3.25) характеризует эволюцию плотности вероятности только за счет реализаций, остающихся в s -м состоянии, т. е. без изменения структуры. Остальные слагаемые определяют те изменения плотности вероятности, которые обусловлены переходами из всех других в s -е состояние.

Преобразуем выражение (3.25), подставив в него из (3.20) значение переходной плотности вероятности $f(y, s, t | y^*, s, t_1)$ при фиксированном s . После выполнения операций интегрирования с учетом δ -функции Дирака получим

$$f(y, s, t) = f(y, s, t_1) - \Delta t \nabla_y^T [\alpha^{(s)}(y, t_1) f(y, s, t_1)] + \\ + \frac{1}{2} \Delta t \nabla_y^T \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t_1) f(y, s, t_1)] \}^T - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y, t_1) f(y, s, t_1) + \\ + \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y', t_1) f(y', r, t_1) q^{(sr)}(y, t | y', t_1) dy' + o(\Delta t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.26)$$

Вычтем из правой и левой частей (3.26) функцию $f(y, s, t_1)$ и разделим на Δt , после чего перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Предполагая существование предела

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(y, s, t) - f(y, s, t_1)}{\Delta t} = \frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t},$$

получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = - \nabla_y^T [\alpha^{(s)}(y, t) f(y, s, t)] + \\ + \frac{1}{2} \nabla_y^T \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t)] \}^T - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(rs)}(y, t) f(y, s, t) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y', t) f(y', r, t) q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \right] \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.27)$$

Система уравнений (3.27) представляет собой обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для марковского разрывного процесса с распределенными переходами. Все уравнения связаны между собой за счет наличия взаимных переходов, характеризующихся функциями $v^{(rs)}(y, t)$ и $v^{(sr)}(y, t)$.

Эти уравнения можно записать также в более короткой форме:

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, s, t)}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}, s, t) - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(rs)}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, s, t) - \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(\mathbf{y}', t) f(\mathbf{y}', r, t) q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) d\mathbf{y}' \right] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.28)$$

где $\pi(\mathbf{y}, s, t) = \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, s, t) - \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{y}}^T [D^{(s)T}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, s, t)] \}^T$.

Последнее выражение представляет собой вектор плотности потока вероятности $f(\mathbf{y}, s, t)$ при фиксированном s . Уравнения (3.28) следует рассматривать при заданных начальных условиях $f(\mathbf{y}_0, s, t_0)$ и граничных $f(\pm\infty, s, t) = 0$.

При независимой марковской смене структур, т. е. при пуассоновских переходах, не зависящих от фазовых координат с интенсивностями переходов $v^{(rs)}(t)$, $v^{(sr)}(t)$, уравнения (3.27) принимают вид

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, s, t)}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}, s, t) - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(rs)}(t) f(\mathbf{y}, s, t) - v^{(sr)}(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}', r, t) q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) d\mathbf{y}' \right] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.29)$$

где условная функция плотности вероятности восстановления реализаций $q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t)$ нормирована к единице.

Вид функции $q^{(sr)}$ определяется физическим содержанием задачи и характеризует начальные условия при восстановлении процесса в s -м состоянии при переходе из r -го состояния. Могут иметь место различные условия восстановления, определяемые функциями $q^{(sr)}$. В частности, если

$$q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'), \quad (3.30)$$

то восстановление точное («жесткое»), т. е. конечные условия процесса в r -м состоянии совпадают с начальными в s -м состоянии (рис. 3.2).

Если условная плотность восстановления

$$q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) = \delta(\mathbf{y} - \gamma^{(s)}(t)), \quad (3.31)$$

то имеют место несвязанные условия восстановления. При восстановлении процесс всегда начинается с заданной функции времени $\gamma^{(s)}(t)$ (рис. 3.3).

Если условная плотность вероятности не зависит от предыдущего состояния

$$q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) = \varphi^{(s)}(\mathbf{y}), \quad (3.32)$$

то имеет место общий случай процесса с несвязанными условиями восстановления.

В общем случае условная функция $q^{(sr)}(y, t|y', t)$ может иметь произвольный закон распределения фазового вектора $y(t)$ в состоянии s при заданном $y'(t)$ в состоянии r .

Аналогично тому, как было получено обобщенное уравнение для функции $f(y, s, t)$, выводится уравнение для функции

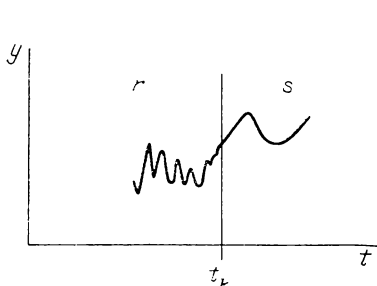


Рис. 3.2. Точное восстановление реализации

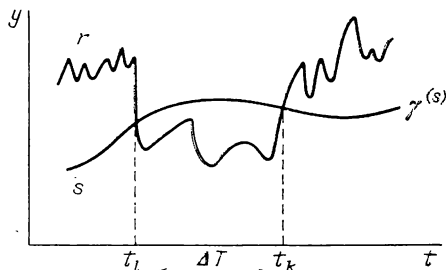


Рис. 3.3. Несвязанные условия восстановления

$f(y, s, t|y', s, t')$. Для этого надо воспользоваться уравнением (3.11) и для малого интервала времени $\Delta t = t - t_1$ при $t' < t_1 < t$ записать связь между $f(y, s, t|y', s, t')$ и $f(y^*, s, t_1|y', s, t')$ с учетом смены структуры:

$$f(y, s, t|y', s, t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(y^*, s, t_1|y', s, t_1) \times f(y, s, t|y^*, s, t_1) \left[1 - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y^*, t_1) \right] dy^* + \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y^*, r, t_1|y', s, t) v^{(sr)}(y^*, t_1) \times q^{(sr)}(y, t|y^*, t_1) dy^* + o(\Delta t). \quad (3.33)$$

Подставим в правую часть формулы (3.33) из (3.20) выражение для $f(y, s, t|y^*, s, t_1)$ при фиксированном s и выполним интегрирование с учетом δ -функции Дирака $\delta(y - y^*)$. В результате получим

$$f(y, s, t|y', s, t') = f(y, s, t_1|y', s, t') - \Delta t \nabla_y^T [\alpha^{(s)}(y, t_1) f(y, s, t_1|y', s, t')] + \frac{1}{2} \Delta t \nabla_y^T [\nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t_1|y', s, t')]]^T - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(y, t_1) f(y, s, t_1|y', s, t') + \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y^*, t_1) f(y^*, r, t_1|y', s, t') \times q^{(sr)}(y, t_1|y^*, t_1) dy^* + o(\Delta t). \quad (3.34)$$

Вычтем из правой и левой частей уравнения (3.33) функцию $f(y, s, t | y', s, t')$, разделим результат на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В пределе получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, s, t | y', s, t')}{\partial t} = & -\nabla_y^T \pi(y, s, t | y', s, t') - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \left\{ v^{(rs)}(y, t) f(y, s, t | y', s, t') - \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y^*, t) \times \right. \\ & \left. \times f(y^*, r, t | y', s, t') q^{(sr)}(y, t | y^*, t) dy^* \right\} \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.35) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \pi(y, s, t | y', s, t') = & \alpha^{(s)}(y, t) f(y, s, t | y', s, t') - \\ & - \frac{1}{2} \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t | y', s, t')] \}^T. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Уравнения (3.35) следует рассматривать при начальных условиях $f(y, s, t | y', s, t) = \delta(y - y')$ и граничных $f(\pm\infty, s, t | y', s, t') = 0$.

Для систем с независимой сменой структуры при пуассоновском процессе $s(t)$ из (3.35) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, s, t | y', s, t')}{\partial t} = & -\nabla_y^T \pi(y, s, t | y', s, t') - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(rs)}(t) f(y, s, t | y', s, t') - \right. \\ & \left. - v^{(sr)}(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y^*, r, t | y', s, t') q^{(sr)}(y, t | y^*, t') dy^* \right] \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.37) \end{aligned}$$

Для функций $f(y, s, k)$ и $f(y, s, k | y', s, l)$ в дискретных системах со случайной структурой, подчиняющихся уравнениям (1.3), которые описывают марковскую разрывную последовательность при определенных переходах, справедливы рекуррентные процедуры. Так, для $f(y, s, k)$ в соответствии с (3.27) рекуррентная формула следующая:

$$\begin{aligned} f(y, s, k+1) = & f(y, s, k) - \nabla_y^T \Delta \pi(y, s, k) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\pi} \left[v^{(rs)}(y, k) f(y, s, k) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y^*, k) f(y^*, r, k) q^{(sr)}(y, k | y^*, k) dy^* \right] \\ & (k = 0, 1, 2, \dots; s = \overline{1, n}). \quad (3.38) \end{aligned}$$

Аналогичная рекуррентная формула справедлива для $f(y, s, k | y', s, l)$:

$$\begin{aligned}
 j(y, s, k + 1 | y', s, l) = & f(y, s, k | y', s, l) - \\
 & - \nabla_y^T \Delta \pi(y, s, k | y', s, l) - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\pi} \left[v^{(rs)}(y, k) f(y, s, k | y', s, l) - \right. \\
 & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y, k) f(y, s, k | y', s, l) q^{(sr)}(y, k | y^*, k) dy^* \right] \quad (s = \overline{1, n}),
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $\Delta \pi(y, s, k) = T_{\pi} \pi(y, s, k)$ и $\Delta \pi(y, s, k | y', s, l) = T_{\pi} \pi(y, s, k | y', s, l)$ — приращения векторов плотности потока вероятностей $f(y, s, k)$ и $f(y, s, k | y', s, l)$ соответственно.

§ 3.4. Функции плотности вероятности разрывных процессов при сосредоточенных переходах

В процессах с сосредоточенными переходами смена состояний связана с достижением реализациями $y(t)$ границ некоторой области в фазовом пространстве. Схематически такой процесс показан на рис. 3.4, где граница между состояниями s и r обозначена детерминированной функцией $y^{(rs)}(t)$.

Будем основываться на предположении, что смена структур на границе описывается условным марковским процессом $s(t)$

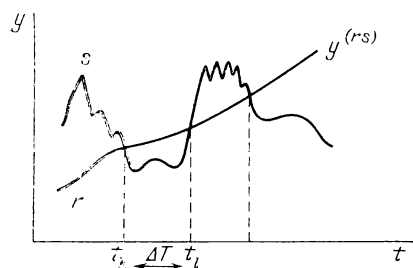


Рис. 3.4. Процесс с сосредоточенными переходами

с вероятностями переходов, зависящими от фазовых координат, расположенных на некоторой граничной гиперплоскости. Выведем уравнение для функции плотности вероятности $f(y, s, t)$ рассматриваемого марковского разрывного процесса с сосредоточенными переходами.

Рассматриваемый марковский процесс, описываемый уравнением (1.1) на интервалах

постоянства $s(t)$, является обычным случайным непрерывным процессом. На этом интервале для процесса $y(t)$ справедливо уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова. Запишем его для функции $f(y, s, t)$ при $s = \text{const}$ в форме (3.7)

$$\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = - \nabla_y^T \pi(y, s, t). \quad (3.40)$$

Рассмотрим малый интервал времени $\Delta t = t - t_l$. На этом интервале с точностью до величины более высокого порядка мало-

сти чем Δt представим уравнение (3.40) в конечно-разностном виде

$$f(y, s, t) = f(y, s, t_1) - \Delta t \nabla_y^T \pi(y, s, t) + o(\Delta t). \quad (3.41)$$

Изучим процесс смены структуры на малом интервале Δt . Часть реализаций процесса $y(t)$ остается непрерывной, а часть достигает границы $y^{(rs)}(t) - y(t) = 0$, и процесс переходит в новое состояние. Наконец, возможен обратный переход реализации процесса $y(t)$ из других состояний. Важно отметить, что здесь, в отличие от распределенных переходов, смена состояний происходит только на границе $y^{(rs)}(t)$. Строго говоря, если реализация процесса $y(t)$ достигает границы $y^{(rs)}(t)$, то за время Δt она пересечет этот уровень бесконечное число раз. Это связано с тем, что реализация марковского процесса является функцией недифференцируемой и имеет весьма изрезанный вид. Поэтому определять факт перехода в другое состояние по единичному пересечению уровня $y^{(rs)}(t)$ нельзя, так как в этом случае процесс перехода будет неординарным. Вследствие этого, так же как и при распределенных переходах, приходим к интегральным характеристикам оценки факта пересечения границы за конечный малый интервал времени Δt . Это оправдывается инерционностью физических систем в режиме смены состояний. Интегральной характеристикой является вероятность пересечения уровня $y^{(rs)}(t)$, т. е. перехода из состояния s в состояние r .

Определим вероятность смены состояния s на состояние r за время Δt , которую обозначим $p^{(rs)}(t)$. Эта вероятность есть вероятность пересечения уровня $y^{(rs)}(t)$ или перехода процесса в другое состояние за время Δt , она соответствует вероятности первого выхода процесса за границу $y^{(rs)}(t)$ на этом интервале. Пусть в момент времени $t_1 < t$ плотность вероятности в s -м состоянии была $f(y, s, t_1)$, а вероятность нахождения процесса в этом состоянии, т. е. до уровня $y^{(rs)}(t)$, следующая:

$$p^{(s)}(t_1) = \int_{-\infty}^{y^{(rs)}} f(y, s, t) dy. \quad (3.42)$$

Примем, что область существования процесса $y(t)$ в состоянии s лежит в пределах от $-\infty$ до $y^{(rs)}(t)$. Граница $y^{(rs)}(t_1)$ является поглощающей для процесса в s -м состоянии. Вследствие этого плотность вероятности и плотность потока вероятности $\pi(y, s, t)$ при нахождении y в области с состоянием r равны нулю. Используя формулу (3.42) и интегрируя уравнение (3.41) в пределах от $-\infty$ до $y^{(rs)}(t_1)$, определим вероятность перехода $p^{(rs)}(t)$ из состояния s в состояние r за время $\Delta t = t - t_1$:

$$p^{(rs)}(t) = p^{(s)}(t) - p^{(s)}(t - \Delta t) = -\Delta t \int_{-\infty}^{y^{(rs)}} \nabla_y^T \pi(y, s, t) dy. \quad (3.43)$$

Полученная вероятность перехода пропорциональна Δt . Это под-

тверждает сделанное ранее предположение об ординарности переходов.

Поскольку в r -м состоянии вектор плотности потока вероятности $\pi(\mathbf{y}, r, t)$ равен нулю, то на границе $y^{(rs)}(t)$ этот вектор испытывает скачок. Следовательно, его надо представить так:

$$\pi(\mathbf{y}, s, t) 1(y^{(rs)} - \mathbf{y}) = \left[\pi_1(\mathbf{y}, s, t) 1(y_1^{(rs)} - y_1) \dots \pi_{n_y}(\mathbf{y}, s, t) 1(y_{n_y}^{(rs)} - y_{n_y}) \right]^T, \quad (3.44)$$

где

$$1(y_i^{(rs)} - y_i) = \begin{cases} 1, & y_i \leq y_i^{(rs)}, \\ 0, & y_i > y_i^{(rs)}, \end{cases} \quad 1(y^{(rs)} - \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in s, \\ 0, & \mathbf{y} \in \bar{s}. \end{cases}$$

Выражение для $\nabla_y^T \pi(\mathbf{y}, s, t)$ на основании (3.44) принимает вид $\nabla_y^T [\pi(\mathbf{y}, s, t) 1(y^{(rs)} - \mathbf{y})] =$

$$= (\nabla_y^T \pi(\mathbf{y}, s, t)) 1(y^{(rs)} - \mathbf{y}) - (\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi(\mathbf{y}, s, t)) \delta(y^{(rs)} - \mathbf{y}), \quad (3.45)$$

где $\mathbf{n}_{rs}^0$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $y^{(rs)}$, а $(\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi(\mathbf{y}, s, t))$ — скалярное произведение векторов:

$$(\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi(\mathbf{y}, s, t)) \delta(y^{(rs)} - \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n_y} \pi_i(\mathbf{y}, s, t) \delta(y_i^{(rs)} - y_i). \quad (3.46)$$

Теперь с учетом (3.45) формулу (3.43) можно переписать, расширив интервал интегрирования до бесконечности:

$$\begin{aligned} p^{(rs)}(t) = & -\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla_y^T \pi(\mathbf{y}, s, t) 1(y^{(rs)} - \mathbf{y})] d\mathbf{y} - \\ & - \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi(\mathbf{y}, s, t)) \delta(y^{(rs)} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Первый интеграл в (3.47) равен нулю, так как при $y_i = \pm \infty$ выражение $[\pi(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{n_y}, s, t)]_{y_i = \pm \infty} = 0$, что доказывается прямым вычислением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\nabla_y^T \pi(\mathbf{y}, s, t) 1(y^{(rs)} - \mathbf{y})] d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi(\mathbf{y}, s, t)]_{y_i = \pm \infty} dy^{(i)} = 0,$$

где $dy^{(i)} = dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_{n_y}$.

Следовательно, вероятность перехода процесса из состояния s в состояние r при сосредоточенном переходе определяется формулой

$$p^{(rs)}(t) = -\Delta t (\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi(y^{(rs)}, s, t)).$$

Вероятность перехода при сосредоточенных переходах пропорциональна вектору плотности потока вероятности. Таким об-

разом, с учетом смены структуры на границе $y^{(rs)}$ уравнение (3.41) для системы со случайной структурой принимает вид

$$f(y, s, t) = f(y, s, t - \Delta t) - \Delta t (\nabla_y^T \pi(y, s, t)) 1(y^{(rs)} - y) - \\ - \Delta t (n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, t)) \delta(y^{(rs)} - y) + o(\Delta t). \quad (3.48)$$

Рассмотрим теперь марковский разрывный процесс с сосредоточенными переходами общего вида. По определению, данному ранее, этот процесс состоит из отрезков непрерывных или непрерывнозначных марковских процессов и имеет сосредоточенные скачки переходов из одного состояния в другое и обратно на границе областей их существования.

На основании выражения (3.48) для общего вида марковского разрывного процесса с сосредоточенными переходами запишем конечно-разностное уравнение для первой функции плотности вероятности $f(y, s, t)$ на малом интервале времени Δt с учетом прямых и обратных переходов реализаций:

$$f(y, s, t) = f(y, s, t - \Delta t) - \Delta t (\nabla_y^T \pi(y, s, t)) 1(y^{(rs)} - y) - \\ - \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n (n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, t)) \delta(y^{(rs)} - y) + \\ + \Delta t \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi(y, r, t)) \delta(y^{(sr)} - y) q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \\ (s = \overline{1, n}). \quad (3.49)$$

Второй член в правой части (3.49) учитывает переход из s -го состояния в любое r -е, третий — обратные переходы из каждого r -го в s -е состояние.

Вычтем из левой и правой частей (3.49) $f(y, s, t - \Delta t)$, разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим обобщенное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для плотностей вероятности разрывного марковского процесса с сосредоточенными переходами:

$$\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = - \nabla_y^T \pi(y, s, t) - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[(n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, t)) \delta(y^{(rs)} - y) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi(y', r, t)) \delta(y^{(sr)} - y') q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \right] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.50)$$

где принято, что существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(y, s, t) - f(y, s, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t}.$$

У первого слагаемого в правой части формулы (3.50) опущен множитель $1(y^{(rs)} - y)$, так как процесс рассматривается в области существования реализаций состояния s , где функции $1(y^{(rs)} - y) = 1$.

Аналогичным путем получается обобщенное уравнение для плотности вероятности перехода $f(y, s, t | y', s, t')$ с учетом сосредоточенных переходов

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, s, t | y', s, t')}{\partial t} = & -\nabla_y^T \pi(y, s, t | y', s, t') - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[(n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, t | y', s, t')) \delta(y^{(rs)} - y) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi(y^*, r, t | y', s, t')) \delta(y^{(sr)} - y^*) q^{(sr)}(y, t | y^*, t) dy^* \right] \\ & (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Начальные условия для уравнений (3.50) должны быть заданы в виде $f(y_0, s, t_0)$ ($s = \overline{1, n}$). Для уравнений (3.51) начальные условия имеют вид $\delta(y - y')$ ($s = \overline{1, n}$).

Граничные условия для функций $f(y, s, t)$ и $f(y, s, t | y', s, t')$ нулевые при $y = \pm \infty$.

Для дискретных систем, описываемых уравнениями (1.3), при сосредоточенных переходах уравнения (3.50) и (3.51) имеют рекуррентную форму и характеризуют эволюцию плотностей вероятностей марковских разрывных последовательностей $y(k)$. Функции плотности вероятности такой последовательности с учетом смены структуры определяется по формулам

$$\begin{aligned} f(y, s, k+1) = & f(y, s, k) - \nabla_y^T \Delta \pi(y, s, t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \left[(n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, k)) \delta(y^{(rs)} - y) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi(y', r, k)) \delta(y^{(sr)} - y') q^{(sr)}(y, k | y', k) dy' \right] \\ & (s = \overline{1, n}; k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Для функции плотности вероятности перехода последовательности $y(k)$ справедливы такие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} f(y, s, k+1 | y', s, l) = & f(y, s, k | y', s, l) - \nabla_y^T \Delta \pi(y, s, k | y', s, l) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \left[(n_{rs}^0 \cdot \pi(y, s, k | y', s, l)) \delta(y^{(rs)} - y) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi(y^*, r, k | y', s, l)) \delta(y^{(sr)} - y^*) q^{(sr)}(y, k | y^*, k) dy^* \right] \\ & (s = \overline{1, n}; k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.53)$$

К динамическим системам со случайной структурой с сосредоточенными переходами относятся также такие, у которых смена структуры происходит под воздействием сигнала логико-динамического блока. В логико-динамическом блоке компоненты вектора состояния $y(t)$ взаимодействуют друг с другом и вырабатывается сигнал переключения данной структуры на другую в соответствии с заданной логикой протекания процесса. При этом переключение происходит всегда при достижении реализациями процесса некоторой границы или порога, формируемых в процессе функционирования системы [6].

§ 3.5. Функции поглощения и восстановления

Удобной интерпретацией рассматриваемых марковских разрывных процессов $[y^T(t), s(t)]^T$ в системах со случайной сменой структуры является модель с поглощением и восстановлением реализаций. Такая модель состоит в том, что в некоторый случайный момент времени реализации одного процесса исчезают, а возникают реализации другого процесса или восстанавливаются прежние [4, 28]. Если в каждом состоянии функционирование системы характеризуется некоторым непрерывным или дискретным случайным процессом $y(t)$, то переключение из одного состояния в другое (смену структур) можно рассматривать как поглощение реализаций данного состояния, а включение предыдущего — как восстановление. Указанные переходы могут совершаться в случайные моменты времени по закону изменения дискретного процесса $s(t)$. Такой скачкообразный переход, как уже указывалось, может совершаться во всей фазовой области изменения переменных, в заданной области или на граничных гиперповерхностях, т. е. при достижении фазовыми координатами некоторых значений (границ). В сущности, эта модель развивает широко используемое представление о поглощающих или отражающих границах (экранах). Кроме поглощающих и отражающих границ вводятся еще области поглощения; могут иметь место случаи, когда вся область существования процесса одновременно является и областью частичного поглощения реализаций. Отличие заключается также в том, что вместо случайного процесса в заданных границах рассматривается процесс в бесконечной области, но с областями поглощения и восстановления реализаций при нулевых граничных условиях в бесконечности.

Модель марковского случайного процесса $y(t)$ с поглощением и восстановлением реализаций в соответствии с законом изменения процесса $s(t)$ позволяет развить единый подход к решению ряда важных практических задач с распределенными и сосредоточенными сменами структур. На каждом неперекрывающемся временном интервале существуют реализации определенного процесса. В случайные моменты времени они прекращают существование (поглощаются), по возникают скачком новые реализации

другого процесса со своими начальными условиями, может быть, отличными от конечных предыдущего состояния.

Введем локальные функции поглощения $\beta(y, s, t)$ и восстановления $\gamma(y, s, t)$ реализаций марковского разрывного процесса в уравнениях (3.28) при распределенных и в уравнениях (3.50) при сосредоточенных переходах. С учетом формулы (2.12) эти функции можно записать в общей форме для рассматриваемых систем случайной структуры в s -м состоянии

$$\beta(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)}(t) \beta^{(rs)}(y, t), \quad (3.54)$$

$$\gamma(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)}(t) \gamma^{(sr)}(y, t), \quad (3.55)$$

где $p^{(s)}(t)$, $p^{(r)}(t)$ — вероятности состояний, в которых находится система; $r, s = \overline{1, n}$; $\beta^{(rs)}(y, t)$, $\gamma^{(sr)}(y, t)$ — компоненты функций поглощения и восстановления.

Компоненты функций поглощения и восстановления при распределенных переходах имеют вид (3.28):

$$\begin{aligned} \beta^{(rs)}(y, t) &= v^{(rs)}(y, t) f^{(s)}(y, t), \\ \gamma^{(sr)}(y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y', t) f^{(r)}(y', t) q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \\ &\quad (s, r = \overline{1, n}; r \neq s). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Компоненты функций поглощения и восстановления при сосредоточенных переходах имеют вид (3.50):

$$\begin{aligned} \beta^{(rs)}(y, t) &= (n_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(y, t)) \delta(y^{(rs)} - y), \\ \gamma^{(sr)}(y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(y, t)) \delta(y^{(sr)} - y') q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \\ &\quad (r, s = \overline{1, n}; r \neq s), \end{aligned} \quad (3.57)$$

где

$$\begin{aligned} \pi^{(s)}(y, t) &= \frac{1}{p^{(s)}(t)} \pi(y, s, t) = \alpha^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f^{(s)}(y, t)] \}^T \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Введенные функции $\beta(y, s, t)$ имеют смысл поглощения s -го состояния или стока вероятности, а функции $\gamma(y, s, t)$ — восстановления s -го состояния или истока вероятности в точке y в момент t . При распределенных переходах поглощение и восстановление реализаций происходит во всей области существования процесса с условными интенсивностями поглощения $v^{(rs)}(y, t)$ и восстановления $v^{(sr)}(y, t)$. Локальные функции поглощения и восстановления при распределенных переходах пропорциональны плотности потока вероятности процесса.

При сосредоточенных переходах поглощение и восстановление реализаций случайного процесса происходит на некоторой границе $(n_y - 1)$ -мерной гиперповерхности $y^{(rs)}(t) - y(t) = 0$, разделяющей n_y -мерную область фазового пространства. Локальные функции поглощения и восстановления при сосредоточенных переходах пропорциональны плотности потока вероятности процесса. Это имеет место, например, в задачах типа срыва управления, в задачах захвата информационного сигнала, в некоторых задачах надежности и других. Гиперповерхность, по существу, является поглощающим экраном — границей, на которой происходит поглощение и восстановление реализаций марковских процессов.

В конкретных задачах в качестве гиперповерхности может быть гиперсфера с центром, смещенным относительно начала координат. Тогда уравнение этой гиперповерхности следующее:

$$\sum_{k=1}^{n_y} (y_k - r_k)^2 - R^2 = 0,$$

где r_k — координаты центра гиперсферы. В некоторых задачах удобно гиперповерхность — границу смены структур процесса представить в виде поверхности n_y -мерного параллелепипеда с боковыми плоскостями, перпендикулярными к координатным осям фазовых переменных системы. Тогда гиперповерхность можно задать координатами граней c_k, d_k гиперпараллелепипеда по каждой фазовой координате y_k . Формула (3.56) в этом случае примет вид

$$\beta^{(rs)}(y, t) = \sum_{k=1}^{n_y} \pi^{(s)}(y, t) \left[\text{sign}(n_{c_k}^0 \cdot y_k^0) \delta(c_k - y_k) + \right. \\ \left. + \text{sign}(n_{d_k}^0 \cdot y_k^0) \delta(d_k - y_k) \right], \quad (3.59)$$

где $n_{c_k}^0, n_{d_k}^0$ — орты внешних нормалей к граням гиперпараллелепипеда; y_k^0 — орт положительного направления фазовой координаты y_k . Функции $\gamma^{(sr)}(y, t)$ (3.57) также запишем в виде

$$\gamma^{(sr)}(y, t) = \sum_{k=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(r)}(y, t) \left[\text{sign}(n_{c_k}^0 \cdot y_k'^0) \delta(c_k - y_k') + \right. \\ \left. + \text{sign}(n_{d_k}^0 \cdot y_k'^0) \delta(d_k - y_k') \right] q^{(sr)}(y, t | y', t) dy'. \quad (3.60)$$

Характерными являются также задачи, в которых захват информационного сигнала происходит в некоторой области W . Обычно такой областью является поле чувствительности прибора или устройства отображения информации. При попадании реализаций процесса в эту область захват происходит не мгновенно. Реализации процесса могут покидать эту область. Чем больше реализаций процесса могут попадать в эту область и чем дли-

тельное время пребывания их в ней, тем увереннее обеспечивается захват сигнала, т. е. поглощение реализаций. Целесообразно в этих задачах принять функцию поглощения в виде

$$\beta(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n C(y) v^{(rs)}(y, t) f(y, s, t), \quad (3.61)$$

где

$$C(y) = \begin{cases} 1, & y \in W, \\ 0, & y \in \overline{W} \quad (s = \overline{1, n}), \end{cases}$$

а функцию восстановления — в виде

$$\gamma(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} C(y) v^{(sr)}(y', t) f(y', r, t) q^{(sr)}(y, t | y', t) dy' \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.62)$$

Как следует из изложенного, функции поглощения и восстановления реализаций для всех рассмотренных марковских разрывных процессов могут быть записаны в общей форме.

Общая форма записи функций поглощения и восстановления реализаций удобна в том отношении, что уравнения (3.28) и (3.50), а также (3.29), (3.38), (3.51), (3.52) можно рассматривать в бесконечной области фазового пространства с учетом нулевых граничных условий в бесконечности. Функции поглощения и восстановления автоматически учитывают смену структуры системы во всем фазовом пространстве или на поглощающих и отражающих границах. Аналогичные функции поглощения и восстановления реализаций случайных процессов в системах со случайной структурой можно ввести для условных вероятностей переходов $f(y, s, t | y^*, s, t^*)$. Формулы (3.54) — (3.58) сохраняют вид с заменой функций $f^{(s)}(y, t)$ на $f^{(s)}(y, t | y^*, t^*)$ и $\pi^{(s)}(y, t)$ на $\pi^{(s)}(y, t | y^*, t^*)$. Рассматриваемые функции поглощения и восстановления являются локальными, так как характеризуют соответствующие процессы в точке с координатами $y(t)$ или на границе $y^{(rs)}$.

Функции поглощения и восстановления реализаций дают возможность рассмотреть круг практических задач, решаемых с помощью прикладной теории марковских случайных процессов. Учет функций поглощения и восстановления реализаций случайных процессов приводит к изменению количественных характеристик оценок вероятностей, но не изменяет физической сущности рассматриваемого процесса, т. е. не нарушает свойств марковости. Последнее следует из локального характера функций поглощения и восстановления.

Компоненты локальных функций поглощения и восстановления можно представить в виде *матричных функций* $\mathbf{V}^*(y, t)$ и

$\Gamma^*(y, t)$. Матричная функция поглощения $B^*(y, t)$ имеет вид

$$B^*(y, t) = \begin{bmatrix} \beta^{(11)}(y, t) & \dots & \beta^{(1n)}(y, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{(n1)}(y, t) & \dots & \beta^{(nn)}(y, t) \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Диагональные элементы $\beta^{(ss)}(y, t)$ матрицы $B^*(y, t)$ выражаются через элементы соответствующего столбца формулами

$$\beta^{(ss)}(y, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \beta^{(rs)}(y, t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.64)$$

Это вытекает из формул (2.60), (3.54) для распределенных переходов. Аналогичное утверждение можно доказать для сосредоточенных переходов.

Матричная функция восстановления $\Gamma^*(y, t)$ следующая:

$$\Gamma^*(y, t) = \begin{bmatrix} \gamma^{(11)}(y, t) & \dots & \gamma^{(1n)}(y, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{(n1)}(y, t) & \dots & \gamma^{(nn)}(y, t) \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Диагональные элементы $\gamma^{(ss)}(y, t)$ матрицы $\Gamma^*(y, t)$ выражаются через педианональные элементы строки:

$$\gamma^{ss}(y, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \gamma^{(sr)}(y, t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.66)$$

Структура матриц поглощения и восстановления характеризует направления и интенсивности переходов. Так, если у матриц (3.63), (3.65) отличны от нуля (кроме диагональных) только элементы, прилежащие к диагонали, то возможны взаимные переходы между ближайшими структурами $s, s+1$ и $s+1, s$ или $s-1, s$ и $s, s-1$ с разностью в один номер. Если матрицы

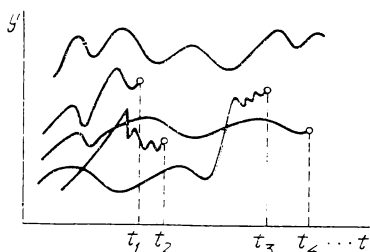


Рис. 3.5. Процесс с распределенным поглощением реализаций

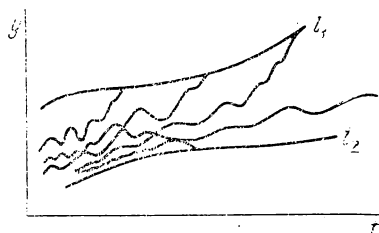


Рис. 3.6. Процесс с сосредоточенным поглощением реализаций

поглощения и восстановления треугольные, то возможны однонаправленные переходы в направлении возрастания или убывания номера состояния. Например, если у матрицы (3.63) отличны от нуля компоненты верхнего треугольника, а у матрицы (3.65) — компоненты нижнего треугольника, то переходы совершаются только в направлении увеличения номера состояния. Если мат-

рица (3.63) является нижней треугольной с компонентами, отличными от нуля, а матрица (3.65) — верхней треугольной с компонентами, отличными от нуля, то в системе возможны переходы с уменьшением номера состояния.

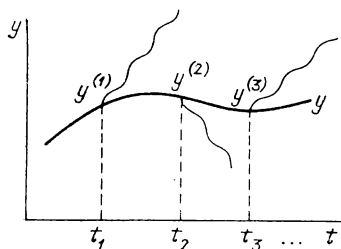


Рис. 3.7. Ветвящийся процесс

Для матриц $B^*(y, t)$ и $\Gamma^*(y, t)$ справедливо следующее соотношение при $q^{(sr)}(y, t | y', t) = \delta(y - y')$:

$$B^*(y, t) = \Gamma^{*r}(y, t). \quad (3.67)$$

Важным классом являются случайные процессы только с поглощением реализаций. Для этих процессов $\Gamma^*(y, t) = 0$. Реализации таких процессов либо вследствие распределенных (рис. 3.5), либо вследствие сосредоточенных (рис. 3.6) переходов прекращают существование в случайные моменты времени. Противоположным классом являются ветвящиеся марковские процессы. Для них матрица $B^*(y, t) = 0$. Имеется порождающий марковский процесс, в случайные моменты времени появляются новые ветви этого процесса, которые продолжают развиваться как марковские процессы (рис. 3.7).

§ 3.6. Обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

В предыдущих параграфах были получены обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для разрывных марковских процессов с распределенными и сосредоточенными переходами на основании рассмотрения характера переходов между состояниями. Эти же уравнения можно получить другим, более общим способом, исходя из закона сохранения вероятности, но с учетом функций поглощения и восстановления. Такой способ вывода уравнений не требует детализации характера процесса и поэтому может быть применен к произвольным процессам со случайной структурой [4, 28].

Рассмотрим n n_y -мерных фазовых пространств, каждое из которых соответствует определенной s -й структуре случайного процесса $y(t)$ мультиструктурной системы. Для произвольного s -го фазового пространства возьмем точку $y = [y_1, \dots, y_{n_y}]^T$. Окружим эту точку замкнутой поверхностью $\Delta S(y)$ с достаточно малым объемом $\Delta v(y)$. Пусть плотность потока вероятности рассматриваемого случайного процесса в s -й структуре характеризуется вектором $\pi(y, s, t)$. Вычислим количество вероятности, выходящей из объема $\Delta v(y)$ через поверхность $\Delta S(y)$ за малый интервал времени Δt , по формуле

$$-\Delta t \oint_{\Delta S(y)} (n^0 \cdot \pi(y, s, t)) dS, \quad (3.68)$$

где n^0 — орт внешней нормали к поверхности $\Delta S(y)$.

Предположим, что во всей n_y -мерной области или в ее части имеются истоки вероятности — поглощения реализаций и истоки вероятности — восстановления реализаций процесса. Они характеризуются локальными функциями поглощения $\beta(y, s, t)$ и восстановления $\gamma(y, s, t)$. В силу этого в объеме $\Delta v(y)$ каждой s -й структуры существует еще поток поглощения вероятности за время Δt , равный

$$[-\beta(y, s, t) + \gamma(y, s, t)] \Delta v(y) \Delta t. \quad (3.69)$$

Поток (3.68) из объема $\Delta v(y)$ через поверхность $\Delta S(y)$ и поток поглощения (3.69) в этом объеме вызывают изменение вероятности за интервал времени Δt , которое можно оценить так:

$$\Delta v(y) [f(y, s, t + \Delta t) - f(y, s, t)]. \quad (3.70)$$

По закону сохранения вероятности изменение вероятности в объеме $\Delta v(y)$ (3.70) равно сумме количества вероятности, выходящей через поверхность (3.68), и поглощенной в этом объеме (3.69):

$$\begin{aligned} \Delta v(y) [f(y, s, t + \Delta t) - f(y, s, t)] = \\ = -\Delta t \oint_{\Delta S(y)} (n^0 \cdot \pi(y, s, t)) dS + [-\beta(y, s, t) + \gamma(y, s, t)] \Delta v(y) \Delta t \\ (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Разделив равенство (3.71) на $\Delta t \Delta v(y)$ и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta v(y) \rightarrow 0$, получим обобщенное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(y, s, t) - \beta(y, s, t) + \gamma(y, s, t) \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.72)$$

где

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(y, s, t + \Delta t) - f(y, s, t)}{\Delta t} = \frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t}, \\ \lim_{\Delta v(y) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S(y)} (n^0 \cdot \pi(y, s, t)) dS}{\Delta v(y)} = \operatorname{div} \pi(y, s, t). \end{aligned}$$

Уравнение (3.72) должно интегрироваться при заданной начальной функции плотности вероятности в момент времени t_0

$$f(y_0, s, t) = \psi_0^{(s)}(y_0)$$

и нулевых граничных условиях в бесконечности при $y = \pm \infty$

$$f(\pm \infty, s, t) = 0.$$

Аналогичные уравнения имеют место для функции плотности вероятности переходов $f(y, s, t | y^*, s, t_1)$. Для их получения следует повторить все изложенные рассуждения и преобразования применительно к функции $f(y, s, t | y^*, s, t_1)$ и соответствующему

вектору плотности условного потока вероятности перехода $\pi(y, s, t | y^*, s, t_1)$. Эти обобщенные уравнения следующие:

$$\frac{\partial f(y, s, t | y^*, s, t_1)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(y, s, t | y^*, s, t_1) - \\ - \beta(y, s, t | y^*, s, t_1) + \gamma(y, s, t | y^*, s, t_1) \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.73)$$

где

$$\pi(y, s, t | y^*, s, t_1) = \alpha^{(s)}(y, t) f(y, s, t | y^*, s, t_1) - \\ - \frac{1}{2} \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t | y^*, s, t_1)] \}^T;$$

$\beta(y, s, t | y^*, s, t_1)$, $\gamma(y, s, t | y^*, s, t_1)$ — функции поглощения и восстановления, аналогичные рассмотренным ранее функциям $\beta(y, s, t)$, $\gamma(y, s, t)$, но с заменой $f(y, s, t)$ на $f(y, s, t | y_1^*, t_1)$.

Уравнения (3.73) следует интегрировать при начальном условии

$$f(y, s, t_1 | y^*, s, t_1) = \delta(y - y^*)$$

и при нулевых граничных условиях

$$f(\pm\infty, s, t | y^*, s, t_1) = 0.$$

Для разрывных марковских процессов уравнения (3.72) и (3.73) полностью определяют все их вероятностные характеристики.

§ 3.7. Обобщенные уравнения Пугачева

Многомерный разрывный марковский процесс также полностью характеризуется двумя характеристическими функциями $g(\lambda, s, t)$ и $g(\lambda, s, t | y^*, s, t_1)$. Для этих характеристических функций можно непосредственно вывести обобщенные уравнения Пугачева или получить их преобразованием Фурье из (3.72) и (3.73).

Применим преобразование Фурье, умножив (3.72) на $\exp(i\lambda^T y)$ и проинтегрировав в бесконечной области векторной переменной y :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} \frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} dy = \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} \operatorname{div} \pi(y, s, t) dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy.$$

Для дальнейшего преобразования этого равенства воспользуемся формулой векторного анализа

$$e^{i\lambda^T y} \operatorname{div} \pi(y, s, t) = \operatorname{div} [e^{i\lambda^T y} \pi(y, s, t)] - \pi(y, s, t) \operatorname{grad}_y e^{i\lambda^T y},$$

а также выражением

$$g(\lambda, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f(y, s, t) dy.$$

После преобразований, с учетом выписанных формул и уравнения (3.29) для $\pi^{(s)}(y, t)$, получим обобщенные уравнения Пу-гачева

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\lambda, s, t)}{\partial t} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda^T \alpha^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} \lambda^T D^{(s)}(y, t) \lambda \right] e^{i\lambda^T y} f(y, s, t) dy - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Начальное условие для уравнений (3.74) также получается преобразованием Фурье начального условия для $f(y_0, s, t_0) = \psi_0(y_0)$:

$$g(\lambda, s, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y_0} \psi_0(y_0) dy_0.$$

Аналогичные уравнения имеют место для $g(\lambda, s, t | y^*, s, t_1)$, но с начальным условием $g(\lambda, s, t_1 | y^*, s, t_1) = e^{i\lambda^T y^*}$.

Характеристические функции равны единице при $\lambda = 0$:

$$g(0, s, t) = 1. \quad g(0, s, t | y^*, s, t_1) = 1.$$

Уравнение (3.74) удобно использовать при недифференцируемых функциях $\alpha^{(s)}(y, t)$ и $D^{(s)}(y, t)$. Кроме того, оно является дифференциальным уравнением первого порядка относительно фазовых координат y , что также имеет определенные преимущества при организации вычислений.

§ 3.8. Уравнения для вероятностей состояний

Функция плотности вероятности $f(y, s, t)$ характеризует распределение фазовых координат $y(t)$ и вероятность структуры $s(t)$. Интеграл от $f(y, s, t)$ по всей области изменения $y(t)$ представляет собой *вероятность состояния (структуры)* $p^{(s)}(t)$ в момент t

$$p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, s, t) dy. \quad (3.75)$$

Получим для функции $p^{(s)}(t)$ дифференциальное уравнение. Для этого проинтегрируем правую и левую части уравнения (3.72) по y в бесконечной области с учетом формулы (3.75):

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)}(t) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} \pi(y, s, t) dy - \int_{-\infty}^{\infty} [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \\ & (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Так как первый интеграл равен нулю в силу доказанного в § 3.5, то уравнение (3.76) принимает вид

$$\dot{p}^{(s)} = -\beta_p^{(s)}(t) + \gamma_p^{(s)}(t) \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.77)$$

где

$$\beta_p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y, s, t) dy, \quad \gamma_p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(y, s, t) dy. \quad (3.78)$$

Формулы (3.78) выражают потоки поглощения и восстановления вероятностей. Они характеризуют общую интенсивность поглощения и восстановления вероятности в единицу времени в состоянии s .

Уравнения (3.77) и формулы (3.78) целесообразно преобразовать с учетом формул (3.52) и (2.13) к виду

$$\beta_p^{(s)}(t) = \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)}(t) \beta_p^{(rs)}(t), \quad \beta_p^{(rs)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(y, t) dy, \quad (3.79)$$

$$\gamma_p^{(s)}(t) = \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)}(t) \gamma_p^{(sr)}(t), \quad \gamma_p^{(sr)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(y, t) dy. \quad (3.80)$$

Величины $\beta_p^{(rs)}(t)$ и $\gamma_p^{(sr)}(t)$ характеризуют интенсивность поглощения и восстановления реализаций стохастического процесса при переходе из состояния s в состояние r и обратно из r в s . Их можно интерпретировать как интенсивности смены структуры при взаимных переходах.

Уравнения (3.77) для вероятностей состояний с учетом (3.79), (3.80) принимают вид

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \gamma_p^{(sr)}(t) \right] \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.81)$$

В частном случае при распределенных независимых переходах, когда $\beta^{(rs)}(y, t) = \nu^{(rs)}(t) f^{(s)}(y, t)$ и $\gamma^{(sr)}(y, t) = \nu^{(sr)}(t) f^{(r)}(y, t)$, при $q^{(sr)}(y, t | y^*, t) = \delta(y - y^*)$ и в соответствии с (3.80) $\beta_p^{(rs)}(t) = \nu^{(rs)}(t)$, $\gamma_p^{(sr)}(t) = \nu^{(sr)}(t)$. Уравнения (3.81) переходят в уравнения Колмогорова (2.54).

Уравнения (3.81) определяют не только вероятности состояний процесса. Они могут служить также для определения функции $f_s(t)$ плотности вероятности распределения времени перехода из s -го состояния:

$$f_s(t) = \dot{p}^{(s)}(t) \operatorname{sign} \dot{p}^{(s)}(t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.82)$$

Множитель $\operatorname{sign} \dot{p}^{(s)}$ следует учесть в формулах (3.82), так как функции плотности вероятности $f_s(t)$ существенно положительны, а производные $\dot{p}^{(s)}$ могут быть отрицательными при уменьшении вероятности состояния.

Учитывая (3.77), запишем (3.82) в следующем виде:

$$f_s(t) = \sum_{r=1 \neq s}^n [p^{(r)}(t) \gamma_p^{(sr)}(t) - p^{(s)}(t) \beta_p^{(rs)}(t)] \operatorname{sign} \dot{p}^{(s)}(t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.83)$$

Используя формулы (3.83), можно определить числовые вероятностные характеристики времени перехода процесса из каждого s -го состояния — математические ожидания $m_i^{(s)}$ и дисперсии $D_i^{(s)}$:

$$m_i^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau f_s(\tau) d\tau, \quad D_i^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - m_\tau^{(s)})^2 f_s(\tau) d\tau, \quad (3.84)$$

где $f_s(\tau)$ можно представить в виде

$$f_s(\tau) = |p^{(s)}(\tau)|.$$

Для дискретных импульсных систем, поведение которых при фиксированном s описывается разностными уравнениями типа (1.3) — (1.5), вероятность состояния вычисляется на основании рекуррентной процедуры. Эта зависимость вытекает из уравнения (3.72), которое предварительно представим так:

$$f(y, s, k+1) = f(y, s, k) - T_\pi \operatorname{div} \pi(y, s, k) - \\ - T_\pi \beta(y, s, k) + T_\pi \gamma(y, s, k) \quad (s = \overline{1, n}; k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.85)$$

где $f(y, s, k)$ — функция плотности вероятности разрывной марковской последовательности $[y^T(k), s(k)]^T$.

Интегрируя левую и правую части (3.85) по y во всем интервале его изменения от $-\infty$ до ∞ , получим

$$p^{(s)}(k+1) = p^{(s)}(k) - T_\pi \sum_{r=1 \neq s}^n [p^{(s)}(k) \beta_p^{(rs)}(k) - p^{(r)}(k) \gamma_p^{(sr)}(k)] \\ (k = 0, 1, \dots; s = \overline{1, n}). \quad (3.86)$$

§ 3.9. Условные обобщенные уравнения для функций плотностей вероятностей

Обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова целесообразно записать также для условных плотностей вероятностей $f^{(s)}(y, t)$ для каждого $s = \overline{1, n}$. Для этого воспользуемся уравнениями (3.72) и формулами (2.12), (3.54). Подставляя (2.12) в (3.72), получим

$$\frac{\partial f^{(s)}(y, t)}{\partial t} p^{(s)}(t) = -p^{(s)}(t) \operatorname{div} \pi^{(s)}(y, t) - \dot{p}^{(s)}(t) f^{(s)}(y, t) - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n [p^{(s)}(t) \beta^{(rs)}(y, t) - p^{(r)}(t) \gamma^{(sr)}(y, t)] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (3.87)$$

где

$$\pi^{(s)}(y, t) = \alpha^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f^{(s)}(y, t)] \}^T. \quad (3.88)$$

Разделив правую и левую части уравнения на $p^{(s)}(t)$, получим условные *нормированные* обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} f^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) \right] \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.89)$$

Используя (3.81), уравнения (3.89) запишем в виде

$$\frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) \right] + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma_p^{(sr)}(t) \right] f^{(s)}(\mathbf{y}, t), \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.90)$$

Эти уравнения необходимо интегрировать совместно с (3.81) и формулами (3.80) для заданных функций $\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t)$ и $\gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t)$ при начальных $f^{(s)}(\mathbf{y}_0, t_0)$, $p^{(s)}(t_0)$ ($s = \overline{1, n}$) и граничных $f^{(s)}(\pm\infty, t) = 0$ условиях.

Аналогичные уравнения имеют место для функции $f^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t')$:

$$\frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t')}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') \right] + \\ + \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma_p^{(sr)}(t) \right] f^{(s)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.91)$$

Начальные условия при интегрировании этих уравнений $f^{(s)}(\mathbf{y}_0, t_0 | \mathbf{y}', t_0) = \delta(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}')$, а граничные $f^{(s)}(\pm\infty, t | \mathbf{y}', t') = 0$. При интегрировании уравнений (3.91) совместно с (3.81) следует учесть формулы для $\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t')$, $\gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t')$ и формулы

$$\beta_p^{(rs)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') d\mathbf{y}, \quad \gamma_p^{(sr)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t') d\mathbf{y}.$$

Нормированные обобщенные уравнения Пугачева для $g^{(s)}(\lambda, t)$ и $g^{(s)}(\lambda, t | \mathbf{y}', t')$ могут быть получены, если умножить уравнения (3.90) или (3.91) на $\exp[\lambda \mathbf{y}]$ и проинтегрировать по $\mathbf{y}$ в бесконечных пределах.

В частности, уравнения для характеристических функций $g^{(s)}(\lambda, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{(s)}(\lambda, t)}{\partial t} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda^T \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t) \lambda \right] e^{i\lambda^T \mathbf{y}} f^{(s)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T \mathbf{y}} \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) \right] d\mathbf{y} + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma_p^{(sr)}(t) \right] g^{(s)}(\lambda, t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.92) \end{aligned}$$

Совместное интегрирование уравнений (3.92) и (3.81) при начальных условиях $g^{(s)}(\lambda, t_0)$ и $p^{(s)}(t_0)$ ($s = \overline{1, n}$) в общем случае возможно только численное.

В дискретных импульсных системах, характеризуемых марковской непрерывнозначной последовательностью в каждой структуре s , аналогом нормированных обобщенных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова являются рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} f^{(s)}(\mathbf{y}, k+1) = & f^{(s)}(\mathbf{y}, k) - T_{\Pi} \operatorname{div} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, k) - \frac{p^{(r)}(k)}{p^{(s)}(k)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, k) \right] + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \left[\beta_p^{(rs)}(k) - \frac{p^{(r)}(k)}{p^{(s)}(k)} \gamma_p^{(sr)}(k) \right] f^{(s)}(\mathbf{y}, k) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.93) \end{aligned}$$

Эти формулы совместно с (3.86) представляют замкнутую систему рекуррентных соотношений, из которых определяются $f^{(s)}(\mathbf{y}, k)$ и $p^{(s)}(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$. Аналогичный вычислительный алгоритм имеет место для функции $f^{(s)}(\mathbf{y}, k | \mathbf{y}^*, h)$.

Такие же обобщенные рекуррентные формулы могут быть получены для характеристических функций $g^{(s)}(\lambda, k)$:

$$\begin{aligned} g^{(s)}(\lambda, k+1) = & g^{(s)}(\lambda, k) + \\ & + T_{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda^T \alpha^{(s)}(\lambda, k) - \frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, k) \lambda \right] e^{i\lambda^T \mathbf{y}} f^{(s)}(\mathbf{y}, k) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T \mathbf{y}} \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, k) - \frac{p^{(r)}(k)}{p^{(s)}(k)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, k) \right] d\mathbf{y} + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n T_{\Pi} \left[\beta_p^{(rs)}(k) - \frac{p^{(r)}(k)}{p^{(s)}(k)} \gamma_p^{(sr)}(k) \right] g^{(s)}(\lambda, k) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.94) \end{aligned}$$

§ 3.10. Уравнения для вероятностных моментов

Уравнения (3.72) или (3.90) служат для определения функций плотностей вероятностей $f(y, s, t)$ или $f^{(s)}(y, t)$. Их интегрирование в аналитическом виде возможно только в простейших случаях. Для численного интегрирования разработаны специальные методы, но они связаны с большим объемом вычислений. Несколько проще интегрирование уравнения для характеристических функций. Но для получения функции плотности вероятности необходимо еще дополнительно выполнить преобразование Фурье.

Во многих практических задачах достаточную информацию о процессах дают вероятностные моменты, для которых на основании (3.72) или (3.90) можно получить дифференциальные уравнения. Предварительно запишем формулу, выражающую безусловный начальный момент любого порядка через функцию $f(y, s, t)$:

$$\kappa_h(t) = \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) f(y, s, t) dy, \quad (3.95)$$

где

$$U_h(y) = y_1^{h_1} \dots y_{n_y}^{h_{n_y}} \quad (h_1 + \dots + h_{n_y} = h; \quad h = 1, 2, \dots).$$

Формулу (3.95) можно представить также в виде

$$\kappa_h(t) = \sum_{s=1}^n \kappa_h^{(s)}(t) p^{(s)}(t) \quad (h = 1, 2, \dots), \quad (3.96)$$

где $\kappa_h^{(s)}(t)$ — условные начальные моменты фазового вектора:

$$\kappa_h^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) f^{(s)}(y, t) dy \quad (s = \overline{1, n}; \quad h = 1, 2, \dots). \quad (3.97)$$

Дифференциальные уравнения для моментов $\kappa_h^{(s)}(t)$ получим, если умножим левую и правую части (3.72) на $U_h(y)$, проинтегрируем по y и просуммируем по s :

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_h = & - \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) \operatorname{div} \pi(y, s, t) dy - \\ & - \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Преобразуем правую часть выражения (3.98) с учетом формулы (3.93) и формул

$$U_h(y) \operatorname{div} \pi(y, s, t) = \operatorname{div} [U_h(y) \pi(y, s, t)] - \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y U_h(y), \quad (3.99)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} [U_h(y) \pi(y, s, t)] dy = 0.$$

Формула (3.99) является следствием нулевых граничных условий вида

$$\pi(y, s, t)|_{y_k=\pm\infty, k=\overline{1, n_y}} = 0. \quad (3.100)$$

Для доказательства второй формулы (3.99) запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} [U_h(y) \pi(y, s, t)] dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_y} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_k} [U_h(y) \pi(y, s, t)] dy_k \right\} dy^{(h)}, \end{aligned}$$

где

$$dy^{(h)} = dy_1 \dots dy_{h-1} dy_{h+1} \dots dy_{n_y}.$$

Вычислим интегралы по y_k в последней формуле, используя формулу (3.100). В результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} [U_h(y) \pi(y, s, t)] dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_y} \left\{ [U_h(y) \pi(y, s, t)]_{y_k=-\infty}^{y_k=\infty} \right\} dy^{(h)} = 0,$$

так как выражения в фигурных скобках равны нулю.

С учетом формулы (3.99) уравнение (3.98) принимает вид

$$\begin{aligned} \kappa_h = \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y U_h(y) dy - \\ - \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Для первого начального момента — вектора математического ожидания $\kappa_1(t) = m(t)$ из (3.101) имеем

$$m = \sum_{s=1}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y y dy - \int_{-\infty}^{\infty} y [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \right\}. \quad (3.102)$$

Для второго начального момента $\kappa_2(t) = \Phi(t)$ из (3.101) получаем

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{s=1}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y y y^T dy - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} y y^T [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \right\}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Уравнения (3.101) можно записать в другой форме, если воспользоваться выражениями (3.54), (3.55) для функций $\beta(y, s, t)$

и $\gamma(y, s, t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_h &= \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y U_h(y) dy - \\ &- \sum_{s=1}^n \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) [p^{(s)}(t) \beta^{(rs)}(y, t) - p^{(r)}(t) \gamma^{(sr)}(y, t)] dy. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Начальные условия при интегрировании этих уравнений суть $\kappa_h(t_0) = \kappa_{h0}$ ($h = 1, 2, \dots$).

Для условных начальных моментов $\kappa_h^{(s)}(t)$, определяемых формулами (3.97), можно получить дифференциальные уравнения, если умножить левую и правую части (3.90) на $U_h(y)$ и проинтегрировать по y в бесконечной области:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_h^{(s)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(s)T}(y, t) \operatorname{grad}_y U_h(y) dy - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y) \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] dy + \\ &+ \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma_p^{(sr)}(t) \right] \kappa_h^{(s)} \quad (s = \overline{1, n}; \quad h = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Аналогичные уравнения имеют место для безусловных $\eta_h(t)$ и условных $\eta_h^{(s)}(t)$ центральных моментов:

$$\begin{aligned} \eta_h(t) &= \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y - \mathbf{m}) f(y, s, t) dy, \\ \eta_h^{(s)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y - \mathbf{m}^{(s)}) f^{(s)}(y, t) dy, \\ U_h(y - \mathbf{m}) &= (y_1 - m_1)^{h_1} \dots (y_{n_y} - m_{n_y})^{h_{n_y}}, \\ U_h(y - \mathbf{m}^{(s)}) &= (y_1 - m_1^{(s)})^{h_1} \dots (y_{n_y} - m_{n_y}^{(s)})^{h_{n_y}} \\ & \quad (h = h_1 + h_2 + \dots + h_{n_y}; \quad h = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Для получения уравнений, определяющих эти центральные моменты, следует правую и левую части (3.72) или (3.90) умножить на $U_h(y - \mathbf{m})$, затем для η_h проинтегрировать по y и просуммировать по s , а для $\eta_h^{(s)}$ только проинтегрировать по y .

В результате после преобразований получим

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_h = & \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y U_h(y - m) dy - \\ & - \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y - m) [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \quad (h = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_h^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(s)T}(y, t) \operatorname{grad}_y U_h(y - m^{(s)}) dy - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} U_h(y - m^{(s)}) \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] dy + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\beta_p^{(rs)}(t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(t) \right] \eta_h^{(s)} \quad (s = \overline{1, n}; \quad h = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Между моментами η_h и $\eta_h^{(s)}$ существуют более сложные связи, чем (3.96). Далее запишем эти выражения для конкретных моментов.

Полученные системы уравнений для $\kappa_h, \kappa_h^{(s)}, \eta_h, \eta_h^{(s)}$ являются бесконечными и, следовательно, незамкнутыми. Для практического использования их следует ограничиться определенным порядком вычисляемого момента и тем самым уменьшить число уравнений. На этом основаны приближенные методы исследования, которые будут рассмотрены в гл. 4.

Для безусловной корреляционной матрицы, т. е. второго центрального момента $\eta_2(t) = \Theta(t)$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y (y - m)(y - m)^T dy - \\ & - \sum_{s=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (y - m)(y - m)^T [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Соответственно для условных моментов $m^{(s)}(t) = \kappa_1^{(s)}, \Phi^{(s)}(t) = \kappa_2^{(s)}$ и $\Theta^{(s)}(t) = \eta_2^{(s)}$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(s)T}(y, t) \operatorname{grad}_y y dy - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} (y - m^{(s)}) \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] dy \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\dot{\Phi}^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(s)\tau}(\mathbf{y}, t) \operatorname{grad}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\mathbf{y}^{\tau}) d\mathbf{y} - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y}\mathbf{y}^{\tau} - \Phi^{(s)}) \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) \right] d\mathbf{y}, \quad (3.111)$$

$$\dot{\Theta}^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) \operatorname{grad}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^{\tau} d\mathbf{y} - \\ - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^{\tau} - \Theta^{(s)}] \left[\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) - \right. \\ \left. - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) \right] d\mathbf{y} \quad (s = 1, n). \quad (3.112)$$

Между моментами $\mathbf{m}(t)$, $\mathbf{m}^{(s)}(t)$, $\Phi(t)$, $\Phi^{(s)}(t)$, $\Theta(t)$, $\Theta^{(s)}(t)$ существуют зависимости вида

$$\mathbf{m}(t) = \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t) \mathbf{m}^{(s)}(t), \quad [\Phi(t) = \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t) \Phi^{(s)}(t), \quad (3.113)$$

$$\Phi(t) = \Theta(t) + \mathbf{m}(t) \mathbf{m}^{\tau}(t), \quad \Phi^{(s)}(t) = \Theta^{(s)}(t) + \mathbf{m}^{(s)}(t) \mathbf{m}^{(s)\tau}(t), \quad (3.114)$$

$$\Theta(t) = \sum p^{(s)}(t) \{ \Theta^{(s)}(t) + [\mathbf{m}^{(s)}(t) - \mathbf{m}(t) (\mathbf{m}^{(s)}(t) - \mathbf{m}(t))^{\tau}] \}. \quad (3.115)$$

Оценка точности системы базируется на понятии ошибки системы

$$\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\tau}(t), \quad (3.116)$$

где $\mathbf{y}_{\tau}(t)$ — теоретическое значение фазового вектора системы. Для вероятностных моментов ошибки ε справедливы формулы, аналогичные (3.111) — (3.113):

$$\mathbf{m}_{\varepsilon}(t) = \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t) \mathbf{m}_{\varepsilon}^{(s)}(t), \quad (3.117)$$

$$\Theta_{\varepsilon}(t) = \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t) \{ \Theta_{\varepsilon}^{(s)}(t) + [\mathbf{m}_{\varepsilon}^{(s)}(t) - \mathbf{m}_{\varepsilon}(t)] [\mathbf{m}_{\varepsilon}^{(s)}(t) - \mathbf{m}_{\varepsilon}(t)]^{\tau} \},$$

где

$$\mathbf{m}_{\varepsilon}(t) = M[\varepsilon(t)], \quad \Theta_{\varepsilon}(t) = M\{[\varepsilon(t) - \mathbf{m}_{\varepsilon}(t)] [\varepsilon(t) - \mathbf{m}_{\varepsilon}(t)]^{\tau}\}.$$

При детерминированном векторе $\mathbf{y}_{\tau}(t)$ математическое ожидание вектора $\mathbf{m}_{\varepsilon}(t)$ и дисперсионная матрица $\Theta_{\varepsilon}(t)$ ошибки системы связаны формулами

$$\mathbf{m}_{\varepsilon}(t) = \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t) \mathbf{m}^{(s)}(t) - \mathbf{y}_{\tau}(t), \quad (3.118)$$

$$\Theta_{\varepsilon} = \Theta. \quad (3.119)$$

Численное решение дифференциальных уравнений (3.102) — (3.112) практически реализуется на цифровых вычислительных машинах. Вычислительные процедуры организуются на основе какого-либо приближенного дискретного способа записи интеграла, для чего предварительно производится дискретизация дифференциального уравнения. Возможность реализации такой процедуры (сходимость вычислительного процесса) зависит от шага дискретизации T_n . В ряде задач шаг дискретизации следует брать малым. При его увеличении вычислительный процесс может стать расходящимся. С другой стороны, при очень малом шаге дискретности может накапливаться арифметическая ошибка. Это обстоятельство надо иметь в виду.

Дальнейшие преобразования уравнений для моментов связаны с типом исходных дифференциальных уравнений системы и видом функций распределения $f(y, s, t)$ и $f^{(s)}(y, t)$, а также с характером процесса смены структуры. Для линейных дифференциальных уравнений системы (1.2) и распределенных условных марковских переходов смены структур функции плотности вероятности $f^{(s)}(y, t)$ можно принять гауссовскими. Они зависят от двух моментов: вектора $m^{(s)}(t)$ и матрицы $\Theta^{(s)}(t)$ ($s = \overline{1, n}$). Уравнения для этих моментов (3.110) и (3.112) можно преобразовать следующим образом. Для линейной системы (1.2) вектор сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$ и матрица диффузии $D^{(s)}(y, t)$ в соответствии с формулами (2.38), (2.40) следующие:

$$\begin{aligned}\alpha^{(s)}(y, t) &= A^{(s)}(t)y + B^{(s)}(t)u(t), \\ D^{(s)}(y, t) &= F^{(s)}(t)G(t)F^{(s)T}(t).\end{aligned}\quad (3.120)$$

Условный вектор плотности потока вероятности $\pi^{(s)}(y, t)$ на основании формул (3.29) и (3.88) принимает вид

$$\begin{aligned}\pi^{(s)}(y, t) &= [A^{(s)}(t)y + B^{(s)}(t)u] f^{(s)}(y, t) - \\ &- \frac{1}{2} [F^{(s)}(t)G(t)F^{(s)T}(t) \nabla_y^T f^{(s)}(y, t)].\end{aligned}\quad (3.124)$$

Полагая условные функции

$$q^{(sr)}(y, t|y^*, t) = \delta(y - y^*),$$

подставляя $\pi^{(s)}(y, t)$ в правую часть уравнения (3.110) и учитывая (3.54), (3.55) и (3.81), получаем

$$\begin{aligned}\dot{m}^{(s)} &= A^{(s)}(t)m^{(s)} + B^{(s)}(t)u(t) - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} (y - m^{(s)}) \left[v^{(rs)}(y, t) f^{(s)}(y, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} v^{(sr)}(y, t) f^{(r)}(y, t) \right] dy\end{aligned}\quad (3.122)$$

$$(s = \overline{1, n}).$$

Аналогично преобразуются уравнения для матриц $\Theta^{(s)}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & \mathbf{A}^{(s)}(t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\top}(t) + \mathbf{F}^{(s)}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{F}^{(s)\top}(t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^\top - \Theta^{(s)}] \times \\ & \times \left[\mathbf{v}^{(rs)}(\mathbf{y}, t) f^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \mathbf{v}^{(sr)}(\mathbf{y}, t) f^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.123)$$

К уравнениям (3.122), (3.123) следует присоединить еще (3.81), которое представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} = & -p^{(s)} \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{v}^{(rs)}(\mathbf{y}, t) f^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \right. \\ & \left. - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \mathbf{v}^{(sr)}(\mathbf{y}, t) f^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Система уравнений (3.122)–(3.124) замкнута и интегрируется при начальных условиях

$$\mathbf{m}^{(s)}(t_0), \Theta^{(s)}(t_0), p^{(s)}(t_0), \sum_{s=1}^n p^{(s)}(t_0) = 1 \quad (s = \overline{1, n}).$$

В частном случае при пуассоновском процессе смены состояний, т. е. при $\mathbf{v}^{(sr)}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}^{(sr)}(t)$ и $\mathbf{v}^{(rs)}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}^{(rs)}(t)$, из (3.123) и (3.124) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}^{(s)} = & \mathbf{A}^{(s)}(t) \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u} - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[\mathbf{v}^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} (\mathbf{m}^{(s)} - \mathbf{m}^{(r)}) \right] \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & \mathbf{A}^{(s)}(t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\top}(t) + \mathbf{F}^{(s)}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{F}^{(s)\top}(t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \left\{ \mathbf{v}^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} [\Theta^{(s)} - \Theta^{(r)} - (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})(\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^\top] \right\} \\ & (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (3.126)$$

а (3.124) принимает вид уравнения Колмогорова (2.54):

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r=1 \neq s}^n \mathbf{v}^{(rs)}(t) + \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)} \mathbf{v}^{(sr)} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.127)$$

Из формул (3.95) и (3.106) можно получить начальные и центральные взвешенные вероятностные моменты фазовых координат, если воспользоваться выражением их через функции

$f(\mathbf{y}, s, t)$. Так, из (3.95) имеем

$$\kappa_h(t) = \sum_{s=1}^n \chi_h^{(s)}(t) \quad (h = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.128)$$

где

$$\chi_h^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_h(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.129)$$

В частности, из (3.129) при $h=1$ получаем *начальный взвешенный момент первого порядка* $\chi_1^{(s)}(t) = \mu^{(s)}(t)$:

$$\mu^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.130)$$

Из формулы (3.106) получаем

$$\eta_h(t) = \sum_{s=1}^n \rho_h^{(s)}(t) \quad (h = 2, 3, \dots), \quad (3.131)$$

где

$$\rho_h^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_h(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.132)$$

Из (3.132) при $h=2$ получаем *центральный взвешенный момент второго порядка*:

$$\Omega^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^T f(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.133)$$

Дифференцируя (3.130) частным образом по t , получим

$$\dot{\mu}^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} \frac{\partial f(\mathbf{y}, s, t)}{\partial t} d\mathbf{y}. \quad (3.134)$$

Подставляя в правую часть (3.134) выражение для $\frac{\partial f(\mathbf{y}, s, t)}{\partial t}$ из (3.72), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(\mathbf{y}, s, t) \operatorname{grad}_{\mathbf{y}} \mathbf{y} d\mathbf{y} - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} [\beta(\mathbf{y}, s, t) - \gamma(\mathbf{y}, s, t)] d\mathbf{y} \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Дифференцируя (3.133) частным образом по t , получим

$$\dot{\Omega}^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^T \frac{\partial f(\mathbf{y}, s, t)}{\partial t} d\mathbf{y}. \quad (3.136)$$

Подставляя в правую часть (3.136) выражение для $\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t}$ из (3.72), получим

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y (y - m^{(s)}) (y - m^{(s)})^T dy - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} (y - m^{(s)}) (y - m^{(s)})^T [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Второй начальный взвешенный момент в виде матрицы $\Psi^{(s)}(t)$ получается в форме

$$\Psi^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y y^T f(y, s, t) dy. \quad (3.138)$$

Для матрицы $\Psi^{(s)}$ можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi^T(y, s, t) \operatorname{grad}_y y y^T dy - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} y y^T [\beta(y, s, t) - \gamma(y, s, t)] dy. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Между безусловными моментами $m(t)$, $\Phi(t)$, $\Theta(t)$ и $\mu^{(s)}$, $\Psi^{(s)}(t)$, $\Omega^{(s)}(t)$ существуют зависимости

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}(t), \quad \Phi(t) = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)}(t), \\ \Theta(t) &= \sum_{s=1}^n [\Omega^{(s)}(t) + \mu^{(s)}(t) \mu^{(s)T}(t)] - m(t) m^T(t). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Взвешенные моменты $\mu^{(s)}(t)$, $\Psi^{(s)}(t)$, $\Omega^{(s)}(t)$ и нормированные моменты $m^{(s)}(t)$, $\Phi^{(s)}(t)$, $\Theta^{(s)}(t)$ связаны между собой зависимостями

$$\begin{aligned} \mu^{(s)}(t) &= p^{(s)}(t) m^{(s)}(t), \quad \Psi^{(s)}(t) = p^{(s)}(t) \Phi^{(s)}(t), \\ \Omega^{(s)}(t) &= p^{(s)}(t) \Theta^{(s)}(t). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Дальнейшие преобразования уравнений для взвешенных моментов связаны с типом исходных уравнений и видом функции $f(y, s, t)$ и производятся аналогично тому, как это показано для нормированных моментов.

Для дискретных систем, поведение которых характеризуется непрерывнозначной последовательностью в каждой структуре s и описывается уравнениями (1.3) или (1.4), вероятностные мо-

менты определяются из соответствующих рекуррентных формул. Они могут быть получены на основании рекуррентных соотношений (3.93) или путем дискретизации выписанных в данном параграфе уравнений для вероятностных моментов.

§ 3.11. Общие рекуррентные формулы для вероятностных характеристик дискретных систем

Динамика дискретных стохастических систем со случайной сменой структуры, описываемых уравнениями (1.3) — (1.6), при произвольном (не малом) интервале дискретности T_n является более сложной, так как на одном интервале дискретности структура может измениться. Для таких систем с непрерывнозначной векторной последовательностью $y(k)$ нетрудно получить рекуррентную формулу, с помощью которой можно определить функцию плотности вероятности. Вывод такой зависимости основывается на рассмотрении разностного уравнения общего вида (1.6). Уравнение (1.6) можно рассматривать для каждого интервала дискретности как функциональную зависимость между значениями последовательностей $y(k)$, $\xi(k)$ и $y(k+1)$ при известных структурах системы. Перепишем его в следующем виде:

$$y(k+1) = \varphi(y(k), s, r, \xi(k), k+1, k), \quad (3.142)$$

где введены обозначения для номера структуры в моменты k и $k+1$: $s(k)=r$, $s(k+1)=s$ ($k=0, 1, \dots$). В частных случаях структура системы за период дискретности может не изменяться.

При фиксированных $y(k)=x$, $s, r, k+1, k$ правая часть (3.142) является функцией $\xi(k)$. Тогда на основании этой функциональной зависимости при известном законе распределения $\xi(k)$ находим условную функцию плотности вероятности вектора $y(k+1)=y$ при фиксированных $x, s, r, k+1, k$ [54], т. е. функцию вероятности перехода от x к y :

$$f_{\Pi}(y, k+1 | x, s, r, k) = \frac{\delta^{n_y}}{\delta y_1 \dots \delta y_{n_y}} \int dF_{\xi}(\xi, k) d\xi, \quad (3.143)$$

где $b = \varphi_p(x, s, r, \xi, k+1, k) \leq y_p(k+1)$, $p=1, n_y$, $F_{\xi}(\xi, k)$ — закон распределения вектора $\xi(k)$. Интеграл в (3.143) распространен по всем значениям компонентов вектора, при которых выполняются соотношения, записанные внизу знака интеграла.

Теперь на основании теоремы полной вероятности запишем формулу для безусловной функции плотности вероятности $f(y, s, k+1)$ в момент $k+1$ с учетом вероятности смены структуры за рассматриваемый дискретный интервал:

$$f(y, s, k+1) = \sum_{r=1}^{n_s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, r, k) f_{\Pi}(y, k+1 | x, s, r, k) \times \\ \times q_0^{(r)}(s, k+1 | r, k, x) dx \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.144)$$

где $q_0^{(sr)}(s, k+1 | r, k, \mathbf{x})$ — условная функция вероятности смены структуры.

Формулы (3.143) и (3.144) определяют расчетную итерационную процедуру для вычисления безусловной функции плотности вероятности $f(\mathbf{y}, s, k+1)$ марковской непрерывнозначной последовательности при заданном, как правило, гауссовском законе распределения дискретного белого шума $\xi(k)$. Вероятность s -й структуры дискретной системы может быть вычислена, если выражение (3.144) проинтегрировать по переменной y :

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, r, k) f_{\Pi}(\mathbf{y}, k+1 | \mathbf{x}, s, r, k) \times \right. \\ \left. \times q_0^{(sr)}(s, k+1 | r, k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] dy. \quad (3.145)$$

Условные функции плотности вероятности $f^{(s)}(\mathbf{y}, k+1)$ теперь следующие:

$$f^{(s)}(\mathbf{y}, k+1) = \frac{1}{p^{(s)}(k+1)} f(\mathbf{y}, s, k+1) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (3.146)$$

В частном случае одноструктурной системы ($s=1$) эти формулы принимают следующий вид итерационной зависимости:

$$f(\mathbf{y}, k+1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, k) \frac{\partial^{n_y}}{\partial y_1 \dots \partial y_{n_y}} \int_b dF_{\xi}(\xi, k) d\mathbf{x}, \quad (3.147)$$

где $b = \varphi_p(\mathbf{x}, \xi, k) < y_p(k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Для линейной одноструктурной системы, описываемой уравнением (1.4), формула (3.147) принимает вид

$$f(\mathbf{y}, k+1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, k) \frac{\partial^{n_y}}{\partial y_1 \dots \partial y_{n_y}} \int_b dF_{\xi}(\xi, k) d\mathbf{x}, \quad (3.148)$$

где $b = \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k)\xi(k) < \mathbf{y}(k+1)$.

Для рассматриваемой системы формулу (3.146) можно преобразовать и получить функцию плотности вероятности в явном виде, так как при гауссовском законе распределения $F_{\xi}(\xi, k)$ плотность вероятности $f_{\Pi}(\mathbf{y}, k+1, \mathbf{x}, k)$ также гауссовская. В этом случае имеем

$$f(\mathbf{y}, k+1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, k) \frac{1}{V_{2^{n_y} \pi^{n_y} \Delta(k)}} \exp \left[\frac{\Delta^*(\mathbf{x}, k)}{\Delta(k)} \right] d\mathbf{x}, \quad (3.149)$$

где

$$\Delta = |\mathbf{H}(k)|; \quad \mathbf{H} = \mathbf{F}(k)\Theta_{\xi}(k)\mathbf{F}^r(k); \\ \Delta^* = [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{m}(k+1)]^T \mathbf{H} [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{m}(k+1)]; \\ \mathbf{m}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)] \mathbf{F}^{-1}(k).$$

На основании полученных рекуррентных формул для безусловных функций распределения разрывных марковских последовательностей можно вычислить вероятностные моменты вектора состояния системы. Так, вектор математического ожидания фазовых координат системы в каждой структуре s определяется по следующей рекуррентной формуле:

$$\mathbf{m}^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, r, k) f_{\Pi}(\mathbf{y}, k+1 | \mathbf{x}, s, r, k) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{p^{(s)}(k+1)} q_0^{(sr)}(s, k+1 | r, k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}. \quad (3.150)$$

Матрица корреляционных моментов $\Theta^{(s)}(k+1)$ для каждой s -й структуры определяется по формулам

$$\Theta^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \{ [\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}(k+1)] [\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}(k+1)]^T \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, r, k) f_{\Pi}(\mathbf{y}, k+1 | \mathbf{x}, s, r, k) \times \\ \times \frac{1}{p^{(s)}(k+1)} q_0^{(sr)}(s, k+1 | r, k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \} d\mathbf{y} \\ (s = 1, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.151)$$

Формула (3.144) — рекуррентная, связывающая плотности вероятности вектора состояния системы на $(k+1)$ -м шаге счета с плотностью вероятности этого вектора на k -м шаге. Она является дискретным аналогом обобщенного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (3.72). При численных расчетах в (3.144) интегрирование заменяется суммированием. Условная плотность вероятности перехода $f_{\Pi}(\cdot)$ в (3.144) находится аналитическими или численными методами с помощью формул (3.143) или других известных формул для закона распределения функции случайных аргументов.

В инженерных расчетах пользоваться формулой (3.144) неудобно, ибо она в большинстве случаев не дает никаких преимуществ по сравнению с методом статистических испытаний на имитационной математической модели. Однако аналогично непрерывному анализу эта формула служит основой для вывода более простых, хотя и приближенных рекуррентных формул (рекуррентных уравнений), определяющих вероятности состояний структуры и моменты фазовых координат (3.145), (3.150), (3.151). Для того чтобы воспользоваться этими итерационными формулами, необходимо знать функцию $f(\mathbf{y}, s, t)$ на каждом шаге. Это реализуется в приближенных методах вычислений, излагаемых в следующей главе, с помощью аппроксимации $f(\mathbf{y}, s, t)$ функцией заданного вида.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ
СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 4.1. Основы приближенных методов

Как показано в гл. 3, для системы со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями, задача отыскания закона распределения вектора состояния сводится к решению обобщенных дифференциальных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (3.72) или обобщенных интегродифференциальных уравнений Пугачева (3.74).

Даже численные решения этих уравнений, не говоря уже об аналитических решениях, вызывают значительные трудности. Поэтому в научной литературе, ориентированной на прикладные задачи, много внимания уделяется *приближенным* методам решения [4, 28, 32].

Наибольшее распространение в прикладных исследованиях получили *метод статистических испытаний, метод линеаризации по Тейлору и метод статистической линеаризации* [31].

Достоинствами первого метода являются *универсальность и гибкость* по отношению к изменениям исходной модели, недостатками — большое время счета вследствие необходимости повторения опытов, трудность генерации устойчивых исходных случайных последовательностей, сложность оценки точности полученного результата и др.

Второй метод основан на *линеаризации* нелинейных функций путем аппроксимации их конечными отрезками многомерных рядов Тейлора, составленными только из *линейных членов*. Этот метод позволяет найти вектор математического ожидания и матрицу корреляционных моментов фазовых координат, не зная их закона распределения и не делая никаких предположений о его виде. При этом имеют место наименьший порядок уравнений и наиболее простые выражения для коэффициентов по сравнению с другими приближенными методами (за исключением, разумеется, метода статистических испытаний).

Третий метод — *метод статистической линеаризации* [24, 31] — близок ко второму методу и дает аналогичные по структуре уравнения для первых двух вероятностных моментов. Выражения для коэффициентов здесь сложнее и зависят от закона распределения, который предполагается гауссовским. Однако это усложнение оправдывает себя при анализе систем, содержащих существен-

ные нелинейности и подверженных сильным случайным возмущениям. Например, метод тейлоровской линеаризации может давать неплохие результаты при анализе работы радиоэлектронной системы в условиях естественных помех невысокого уровня. Но в условиях радиопротиводействия необходимо учитывать совместное прохождение через нелинейные звенья полезного сигнала и помехи, близких между собой по мощности. В этом случае метод линеаризации по Тейлору заметно уступает в точности методу статистической линеаризации.

Последний метод относится к группе методов параметрической аппроксимации.

Большинство приближенных методов основано на аппроксимации неизвестной плотности вероятности или характеристической функции отрезком некоторого функционального ряда, что позволяет перейти к более простым уравнениям для членов этого ряда. Так, например, аппроксимация условных плотностей вероятностей отрезками многомерных рядов Грама — Шарлье дает замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для условных вероятностных моментов [13], а аппроксимация отрезками многомерных рядов Эджворта — аналогичную систему уравнений для условных семинвариантов [32].

Приближенный метод решения, основанный на разложении плотности вероятности в ряд по ортогональным функциям, изложен в [32]. Этот метод аппроксимации обеспечивает совпадение фактической и приближенной плотностей вероятностей с точностью до законов распределения отдельных фазовых координат и их взаимных корреляционных моментов.

Аппроксимация условных плотностей вероятностей линейными композициями гауссовских плотностей положена в основу метода, предложенного в [68].

Рассмотренные методы анализа, основанные на параметрической аппроксимации, позволяют приближенно пайти закон распределения вектора состояния или вероятностные моменты высшего порядка. Однако широкого распространения в практике при определении законов распределения эти методы не получили. С ростом порядка исходной модели резко возрастают порядок и сложность уравнений для вероятностных моментов высших порядков.

Из приближенных методов анализа наименьший порядок уравнений для моментов дают *методы двухмоментной параметрической аппроксимации* (в частности, метод статистической линеаризации). Параметрическая аппроксимация состоит в замене искоемых условных плотностей вероятностей $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ известными функциями, зависящими лишь от первых двух условных моментов $\mathbf{m}^{(s)}(t)$ и $\Theta^{(s)}(t)$.

Снижение порядка уравнений вызывает потерю точности вычислений. Однако в условиях недостоверной априорной информации этот недостаток зачастую мало влияет на окончательную точность результатов.

Более серьезным недостатком, присущим всем приближенным методам анализа, за исключением метода статистических испытаний, является то, что изменение порядка исходной модели вызывает существенное изменение уравнений для вероятностных характеристик.

Тем не менее в задачах анализа числовых вероятностных характеристик стохастических процессов в динамических системах методы двухмоментной аппроксимации в состоянии успешно конкурировать с методом статистических испытаний. Это наглядно проявляется, например, в экономии времени расчетов при автоматизации программирования и заданной точности получения оценок.

Случайный скачкообразный характер процессов, протекающих в системах со случайно изменяющейся структурой, заставляет отдать предпочтение методу двухмоментной аппроксимации [12, 13, 72] перед методом тейлоровской линеаризации. Последний, как уже было сказано, хорош только при небольших флуктуациях фазовых координат относительно своих не очень резко изменяющихся средних значений. Являясь *локальным методом* линеаризации, он принципиально не учитывает свойства нелинейности в целом. *Метод двухмоментной аппроксимации, в частности статистической линеаризации*, принципиально дает возможность учесть особенности нелинейности при больших флуктуациях фазовых координат в силу своей *нелокальности*.

Другой конкурентоспособный метод — метод статистических испытаний — не имеет существенных преимуществ при исследовании данных систем и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

§ 4.2. Двухмоментная параметрическая аппроксимация плотностей вероятностей

Как сказано в предыдущем параграфе, приближенные методы анализа динамических стохастических систем со случайной структурой основываются на исследовании вероятностных моментов фазовых координат, т. е. числовых характеристик стохастических процессов. Уравнения для этих моментов любого порядка в общем виде были получены в § 3.10 на основании использования (3.72) для плотности вероятности $f(y, s, t)$ или из уравнения (3.74) для характеристической функции $g(\lambda, s, t)$. Рассмотрим более подробно уравнения для безусловных вектора математического ожидания $m(t)$, матрицы корреляционных моментов $\Theta(t)$ и вероятностей состояний $p^{(s)}(t)$ [12, 13, 72].

Напомним формулы, связывающие вероятностные моменты фазовых координат, вероятности состояний и плотность вероятности $f(y, s, t)$:

$$p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, s, t) dy, \quad m^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y f^{(s)}(y, t) dy,$$

$$f^{(s)}(\mathbf{y}, t) = f(\mathbf{y}, s, t) p^{(s)}(t), \quad \mathbf{m}(t) = \sum_{s=1}^n \mathbf{m}^{(s)}(t) p^{(s)}(t),$$

$$\Theta^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}(t)] [\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}(t)]^T f^{(s)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (4.1)$$

$$\Theta(t) = \sum_{s=1}^n [\Theta^{(s)}(t) + \mathbf{m}^{(s)}(t) \mathbf{m}^{(s)T}(t)] p^{(s)}(t) - \mathbf{m}(t) \mathbf{m}^T(t).$$

Дифференцируя по t левые и правые части формул (4.1) и подставляя в полученные выражения правую часть уравнения (3.72), получим (аргумент t у всех функций здесь и далее опущен):

$$\dot{p}^{(s)} = - \sum_{r \neq s} \beta_p^{(rs)} p^{(s)} + \sum_{r \neq s} \gamma_p^{(sr)} p^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \quad (4.2)$$

$$\dot{\mathbf{m}}^{(s)} = \alpha_p^{(s)} - \sum_{r \neq s} \beta_m^{(rs)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \gamma_m^{(sr)} p^{(r)}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\Theta}^{(s)} = \mathbf{A}_m^{(s)} + \mathbf{A}_m^{(s)T} + \mathbf{D}_p^{(s)} - \sum_{r \neq s} \mathbf{B}_\Theta^{(rs)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \Gamma_\Theta^{(sr)} p^{(r)},$$

где

$$\begin{aligned} \beta_p^{(rs)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; & \gamma_p^{(sr)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; \\ \alpha_p^{(s)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{(s)}(\mathbf{y}) f^{(s)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; & \mathbf{D}_p^{(s)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}) f^{(s)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; \\ \beta_m^{(rs)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(\mathbf{y}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) d\mathbf{y}; & \gamma_m^{(sr)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) d\mathbf{y}; \\ \mathbf{A}_m^{(s)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{(s)}(\mathbf{y}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^T f^{(s)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; \\ \mathbf{B}_\Theta^{(rs)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(\mathbf{y}) [(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^T - \Theta^{(s)}] d\mathbf{y}; & (4.4) \\ \Gamma_\Theta^{(sr)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}) [(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^T - \Theta^{(s)}] d\mathbf{y}; \\ \sum_{r \neq s} &\triangleq \sum_{r=1 \neq s}^n \quad (r, s = \overline{1, n}; s \neq r). \end{aligned}$$

Уравнения (4.3) интегрируются при начальных условиях, определяемых по формулам (4.1) на основании известных $f(\mathbf{y}, s, t_0)$.

Для того чтобы система уравнений (4.3) была замкнутой, необходимо аппроксимировать неизвестные условные плотности вероятностей $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ известными функциями, параметрически зави-

сящими только от первых двух искомым моментов $m^{(s)}(t)$ и $\Theta^{(s)}(t)$. Эти функции должны удовлетворять условию нормировки, а интегралы (4.4), зависящие от них, должны выражаться через элементарные или табулированные функции.

Например, во многих случаях для аппроксимации удобно использовать многомерное нормальное распределение или усеченное нормальное распределение. Это объясняется двумя причинами: эффектом «нормализации» законов распределения в инерционных динамических системах высокого порядка и относительной простотой получаемых уравнений [34]. Могут быть использованы и такие известные однопараметрические и двухпараметрические непрерывные распределения, как бета-распределение (и его частные случаи: равномерное, степенное, закон арксинуса), гамма-распределение (и его частные случаи: показательное, показательное степенное, χ^2 -распределение, закон Эрланга), распределение Стюдента (t -распределение), распределения Симпсона, Релея, Максвелла, Парето, логистическое распределение и F -распределение. Возможно использование и дискретных распределений, например биномиального, геометрического, Паскаля, Пуассона, равномерного и др.

Параметры этих непрерывных и дискретных распределений связаны с их моментами простыми алгебраическими формулами.

При численном решении уравнений (4.3) на ЭВМ может наблюдаться ухудшение их устойчивости при малых значениях вероятностей $p^{(s)}$, стоящих в знаменателях последних членов правых частей. Во избежание этого приходится уменьшать величину шага счета, что приводит к увеличению времени вычислений и накопленной ошибки машинной арифметики.

Другой способ повышения устойчивости при численном интегрировании состоит в преобразовании уравнений (4.3) путем замены переменных

$$\mu^{(s)} = m^{(s)} p^{(s)}, \quad \Omega^{(s)} = \Theta^{(s)} p^{(s)}. \quad (4.5)$$

После такой замены уравнения (4.2), (4.3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} \beta_p^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \gamma_p^{(sr)} p^{(r)}, \\ \ddot{\mu}^{(s)} &= \alpha_p^{(s)} p^{(s)} - p^{(s)} \sum_{r \neq s} \beta_\mu^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \gamma_\mu^{(sr)} p^{(r)}, \\ \ddot{\Omega}^{(s)} &= (A_m^{(s)} + A_m^{(s)T} + D_p^{(s)}) p^{(s)} - p^{(s)} \sum_{r \neq s} B_\Omega^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \Gamma_\Omega^{(sr)} p^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\beta_\mu^{(rs)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \beta_p^{(rs)}(y) y dy, \quad \gamma_\mu^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_p^{(sr)}(y) y dy,$$

$$B_{\Omega}^{(rs)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(rs)}(y)(y - m^{(s)})(y - m^{(s)})^T dy, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{\Omega}^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(sr)}(y)(y - m^{(s)})(y - m^{(s)})^T dy.$$

Сопоставление (4.4) и (4.7) показывает, что между ними существует связь в виде

$$\begin{aligned} \beta_{\mu}^{(rs)} &= \beta_m^{(rs)} + \beta_p^{(rs)} m^{(s)}, & \gamma_{\mu}^{(sr)} &= \gamma_m^{(sr)} + \gamma_p^{(sr)} m^{(s)}, \\ B_{\Omega}^{(rs)} &= B_{\Theta}^{(rs)} + \beta_p^{(rs)} \Theta^{(s)}, & \Gamma_{\Omega}^{(sr)} &= \Gamma_{\Theta}^{(sr)} + \gamma_p^{(sr)} \Theta^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Правые части уравнения (4.6) содержат операцию деления на $p^{(s)}$ лишь под знаком функций $\beta_p^{(rs)}$, $\gamma_p^{(sr)}$, $\alpha_p^{(s)}$, $\beta_{\mu}^{(rs)}$, $\gamma_{\mu}^{(sr)}$, $A_m^{(s)}$, $D_p^{(s)}$, $B_{\Omega}^{(rs)}$, $\Gamma_{\Omega}^{(sr)}$, зависящих от $m^{(s)}$ и $\Theta^{(s)}$. Последние на основании (4.5) выражаются через $\mu^{(s)}$ и $\Theta^{(s)}$ формулами

$$m^{(s)} = \mu^{(s)} / p^{(s)}, \quad \Theta^{(s)} = \Omega^{(s)} / p^{(s)}. \quad (4.9)$$

Таким образом, приближенный анализ системы со случайной структурой может быть проведен путем решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (4.3) для вероятностей состояний структуры $p^{(s)}$ условных математических ожиданий вектора фазовых координат $m^{(s)}$ и условных матриц корреляционных моментов $\Theta^{(s)}$ ($s = 1, n$) при фиксированных состояниях структуры.

Безусловные математическое ожидание m и матрица корреляционных моментов Θ находятся по формулам (4.2).

Вероятностные коэффициенты $\beta_p^{(rs)}$, $\gamma_p^{(sr)}$, $\alpha_p^{(s)}$, $\beta_{\mu}^{(rs)}$, $\gamma_{\mu}^{(sr)}$, $B_{\Theta}^{(rs)}$, $\Gamma_{\Theta}^{(sr)}$, $A_m^{(s)}$, $D_p^{(s)}$, определяемые формулами (4.4), зависят от параметров условных плотностей вероятностей $f^{(s)}(y, t)$. Эти параметры являются известными алгебраическими функциями искомых переменных $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$ в зависимости от применяемой аппроксимации функций $f^{(s)}(y, t)$.

На рис. 4.1 приведена структурная схема алгоритма определения вероятностных характеристик систем со случайной структурой. Она дает наглядное представление о составе и внутренних связях алгоритма определения вероятностных характеристик. В частности, видно, что алгоритм определения вероятностных коэффициентов β является нелинейной жесткой обратной связью, которая перекрестно соединяет между собой алгоритмы определения вероятностей и условных моментов $I-3$ и замыкает весь алгоритм в целом.

Аппроксимирующие двухпараметрические законы распределения выбираются на основании априорных данных, получаемых экспериментальным путем или при помощи имитационных моделей. Удачный выбор закона распределения или множества зако-

нов во многом зависит от инженерной интуиции и опыта исследователя.

Для отыскания наиболее предпочтительного закона распределения из выбранного множества можно применить известные методы математической статистики.

При численном решении на ЭВМ удобной формой записи уравнений может оказаться система (4.5) — (4.7) для взвешенных

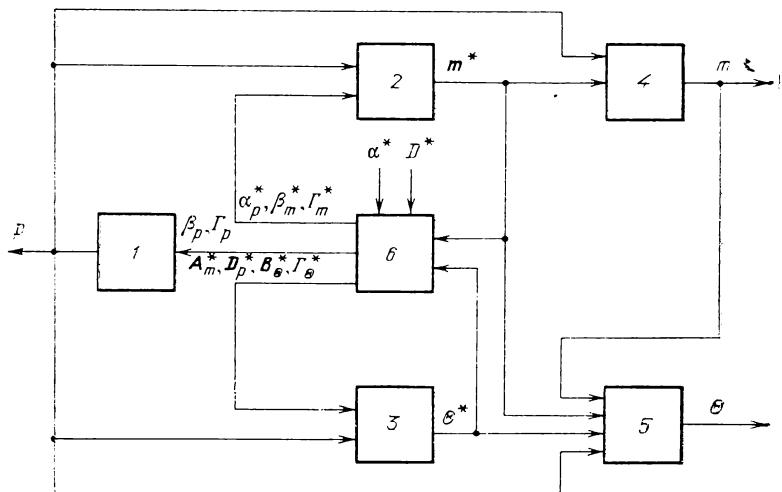


Рис. 4.1. Схема алгоритма определения вероятностных характеристик состояния нелинейной системы со случайной структурой: 1—3 — алгоритмы определения вероятностей и условных моментов (4.3); 4, 5 — алгоритмы определения безусловных моментов (4.2); 6 — алгоритм определения вероятностных коэффициентов (4.4); символ * означает блочный вектор, составленный из соответствующих условных переменных (m^* — блочный вектор с элементами $m^{(s)}$, θ^* — блочный вектор с элементами $\theta^{(s)}$ и т. д., где $s = 1, n$)

моментов $\mu^{(s)} = p^{(s)} m^{(s)}$, $\Omega^{(s)} = p^{(s)} \theta^{(s)}$, т. е. моментов, взятых с весом $p^{(s)}$. Разностные уравнения, соответствующие (4.6), менее чувствительны к величине шага счета и поэтому более устойчивы, чем их аналоги, соответствующие уравнениям (4.3).

§ 4.3. Системы с условной марковской структурой

Для систем с условной марковской структурой функции поглощения $\beta^{(rs)}(y, t)$ и восстановления $\gamma^{(sr)}(y, t)$ выражаются через условные интенсивности переходов структуры $v^{(rs)}(y, t)$ и $v^{(sr)}(y, t)$ формулами (3.56) и при $q^{(sr)} = \delta(y^* - y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \beta^{(rs)}(y, t) &= v^{(rs)}(y, t) f^{(s)}(y, t), \\ \gamma^{(sr)}(y, t) &= v^{(sr)}(y, t) f^{(r)}(y, t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поэтому выражения (4.4) для коэффициентов $\beta_p^{(rs)}$, $\gamma_p^{(sr)}$, $\beta_m^{(rs)}$,

$\gamma_m^{(sr)}$, $B_\Theta^{(rs)}$, $\Gamma_\Theta^{(sr)}$ принимают вид

$$\begin{aligned}
 \beta_p^{(rs)} &\triangleq v_p^{(rs)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(rs)}(y) f^{(s)}(y) dy, \\
 \gamma_p^{(sr)} &\triangleq v_p^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y) f^{(r)}(y) dy, \\
 \sum_{r \neq s}^n \beta_m^{(rs)} &\triangleq v_m^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r \neq s} v^{(rs)}(y) (y - m^{(s)}) f^{(s)}(y) dy, \\
 \gamma_m^{(sr)} &\triangleq v_m^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y) (y - m^{(s)}) f^{(r)}(y) dy, \\
 \sum_{r \neq s} B_\Theta^{(rs)} &\triangleq N_\Theta^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r \neq s} v^{(rs)}(y) [(y - m^{(s)})(y - m^{(s)})^T - \Theta^{(s)}] f^{(s)}(y) dy, \\
 \Gamma_\Theta^{(sr)} &\triangleq N_\Theta^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(y) [(y - m^{(s)})(y - m^{(s)})^T - \Theta^{(s)}] f^{(r)}(y) dy \\
 &\quad (s, r = \overline{1, n}).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_p^{(s)}$, $D_p^{(s)}$, $A_m^{(s)}$ остаются прежними и определяются выражениями (4.4).

В соответствии с (4.11) уравнения (4.2) и (4.3) для вероятностных характеристик запишем в форме

$$\begin{aligned}
 \dot{p}^{(s)} &= - \sum_{r \neq s} v_p^{(rs)} p^{(s)} + \sum_{r \neq s} v_p^{(sr)} p^{(r)}, \\
 \dot{m}^{(s)} &= \alpha_p^{(s)} - v_m^{(s)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v_m^{(sr)} p^{(r)}, \\
 \dot{\Theta}^{(s)} &= A_m^{(s)} + A_m^{(s)T} + D_p^{(s)} - N_\Theta^{(s)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} N_\Theta^{(sr)} p^{(r)} \\
 &\quad (s = \overline{1, n}).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Если для аппроксимации $f^{(s)}(y, t)$ выбрано гауссовское распределение, то часть выражений (4.11) упрощается вследствие того, что

$$\begin{aligned}
 v_m^{(rs)} &= \left(\frac{\partial v_p^{(rs)}}{\partial m^{(s)}} \Theta^{(s)} \right)^T, \quad v_m^{(s)} = \left(\frac{\partial v_p^{(s)}}{\partial m^{(s)}} \Theta^{(s)} \right)^T, \\
 N_\Theta^{(rs)} &= \frac{\partial v_m^{(rs)}}{\partial m^{(s)}} \Theta^{(s)}, \quad N_\Theta^{(s)} = \frac{\partial v_m^{(s)}}{\partial m^{(s)}} \Theta^{(s)}, \\
 A_m^{(s)} &= \frac{\partial \alpha_p^{(s)}}{\partial m^{(s)}} \Theta^{(s)}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Остальные вероятностные коэффициенты, определяемые выражениями (4.11), в ряде практических задач при использовании гауссовской аппроксимации могут быть найдены по формулам для коэффициентов статистической линеаризации типовых нелинейностей. Эти формулы приведены, например, в [24, 53].

Структурная схема алгоритма остается такой же, как в общем случае (см. рис. 4.1). Структура алгоритмов 1—5 также не изменяется. Изменяется лишь алгоритм 6 определения вероятностных коэффициентов, которые вычисляются по формулам (4.11) и (4.4).

Заменой переменных $\mu^{(s)} = p^{(s)} \mathbf{m}^{(s)}$, $\Omega^{(s)} = p^{(s)} \Theta^{(s)}$ можно избавиться от операции деления в явной форме на $p^{(s)}$ в правых частях уравнений (4.12). Как будет показано далее, это помогает при реализации, моделировании и анализе алгоритмов. Выражения для взвешенных вероятностных моментов $\mu^{(s)}$ и $\Omega^{(s)}$ и $\dot{p}^{(s)}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(s)} &= - \sum_{r \neq s} v_p^{(rs)} p^{(s)} + \sum_{r \neq s} v_p^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mu}^{(s)} &= \alpha_p^{(s)} p^{(s)} - \sum_{r \neq s} v_\mu^{(rs)} p^{(s)} + \sum_{r \neq s} v_\mu^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\Omega}^{(s)} &= (\mathbf{A}_m^{(s)} + \mathbf{A}_m^{(s)\top} + \mathbf{D}_p^{(s)}) p^{(s)} - \mathbf{N}_\Omega^{(s)} p^{(s)} + \sum_{r \neq s} \mathbf{N}_\Omega^{(sr)} p^{(r)},\end{aligned}\tag{4.14}$$

где

$$\begin{aligned}v_\mu^{(rs)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(rs)}(\mathbf{y}) \mathbf{y} f^{(s)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad v_\mu^{(sr)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(\mathbf{y}) \mathbf{y} f^{(r)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{N}_\Omega^{(s)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r \neq s} v^{(rs)}(\mathbf{y}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^\top f^{(s)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{N}_\Omega^{(sr)} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^{(sr)}(\mathbf{y}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^\top f^{(r)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Коэффициенты (4.15) и (4.11) связаны между собой выражениями

$$\begin{aligned}v_\mu^{(rs)} &= v_m^{(rs)} + v_p^{(rs)} \mathbf{m}^{(s)}, & v_\mu^{(sr)} &= v_m^{(sr)} + v_p^{(sr)} \mathbf{m}^{(s)}, \\ \mathbf{N}_\Omega^{(s)} &= \mathbf{N}_\Theta^{(s)} + v_p^{(s)} \Theta^{(s)}, & \mathbf{N}_\Omega^{(sr)} &= \mathbf{N}_\Theta^{(sr)} + v_p^{(sr)} \Theta^{(s)}\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$(r, s = \overline{1, n}; r \neq s).$$

Для вычисления коэффициентов уравнений (4.14) удобнее пользоваться выражениями (4.11) и (4.16), поскольку они проще выражений (4.15).

§ 4.4. Непрерывные системы с марковской структурой

Для систем с *марковской* структурой интенсивности переходов не зависят от фазовых координат: $\nu^{(sr)}(\mathbf{y}, t) = \nu^{(sr)}(t)$ ($s, r = \overline{1, n}$; $s \neq r$). Это обстоятельство заметно упрощает уравнения (4.12) для вероятностных характеристик, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} \nu^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \nu^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mathbf{m}}^{(s)} &= \alpha_p^{(s)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \nu^{(sr)} p^{(r)} (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}), \\ \dot{\Theta}^{(s)} &= \mathbf{A}_m^{(s)} + \mathbf{A}_m^{(s)\top} + \mathbf{D}_p^{(s)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \nu^{(sr)} p^{(r)} \times \\ &\times [\Theta^{(r)} - \Theta^{(s)} + (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^\top] \quad (s = \overline{1, n}).\end{aligned}\quad (4.17)$$

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения для вероятностей состояний $p^{(s)}$ в (4.17) — это известные уравнения Колмогорова, не связанные с остальными уравнениями (4.17), поскольку коэффициенты $\nu^{(sr)}(t)$ не зависят от $\mathbf{m}^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$.

Уравнения для математических ожиданий и корреляционных моментов также существенно упростились по сравнению с (4.12). Однако эти уравнения по-прежнему остаются нелинейными, так как коэффициенты $\alpha_p^{(s)}$, $\mathbf{A}_m^{(s)}$ и $\mathbf{D}_p^{(s)}$ для нелинейной функции $\Phi^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ определяются выражениями (4.4) и при двухмоментной аппроксимации условных плотностей $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ будут зависеть от $\mathbf{m}^{(s)}(t)$, $\Theta^{(s)}(t)$.

Рассмотрим один практически важный класс систем со случайной структурой. Пусть имеется линейная динамическая система с марковской структурой. В каждом из состояний структуры система описывается *линейными* стохастическими дифференциальными уравнениями, содержащими *аддитивные* и *мультипликативные* белые шумы:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}^{(s)}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u}(t) + [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t) \mathbf{y}^\top] \xi(t) \\ &\quad (s = \overline{1, n}).\end{aligned}\quad (4.18)$$

Эта система линейна по отношению к выходному сигналу $\mathbf{y}$, что можно наглядно показать, переписав уравнение (4.18) в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = [\mathbf{A}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t) \xi^\top(t)] \mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{F}^{(s)}(t) \xi(t).$$

Отсюда видно, что линейная система подвергается как аддитивным (входным) возмущениям $\mathbf{F}^{(s)}(t) \xi(t)$, так и мультипликативным (параметрическим) возмущениям $\mathbf{g}^{(s)}(t) \xi^\top(t)$.

Коэффициенты сноса и диффузии для этой системы согласно общим выражениям (2.38), (2.40) определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{A}^{(s)}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)}(t) \operatorname{tr} \{ [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t) \mathbf{y}^T] \mathbf{G}(t) \}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t) = [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t) \mathbf{y}^T] \mathbf{G}(t) [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t) \mathbf{y}^T]^T.$$

Подставляя (4.19) в (4.4), получаем выражения (аргумент t опущен для простоты записи)

$$\begin{aligned} \alpha_p^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \operatorname{tr} [(\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T}) \mathbf{G}], \\ \mathbf{A}_m^{(s)} &= \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right) \Theta^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{D}_p^{(s)} = (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T}) \mathbf{G} (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T})^T + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \operatorname{tr} (\mathbf{G} \Theta^{(s)}).$$

Уравнения (4.17) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mathbf{m}}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \operatorname{tr} [(\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T}) \mathbf{G}] + \\ &+ (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}), \\ \dot{\Theta}^{(s)} &= \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right)^T + \\ &+ (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T}) \mathbf{G} (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)T})^T + \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \operatorname{tr} (\mathbf{G} \Theta^{(s)}) + \\ &+ (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} [\Theta^{(r)} - \Theta^{(s)} + (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^T] \\ &(s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Другим вариантом (с более сложной зависимостью между $\mathbf{y}(t)$ и $\xi(t)$) линейной системы с марковской структурой и аддитивно-мультипликативными возмущениями является система

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u}(t) + [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{H}^{(s)T}(t) \mathbf{y}] \xi(t), \quad (4.22)$$

где $\mathbf{H}^{(s)T}(t)$ — блочный n_y -мерный вектор-строка, k -й элемент которого есть квадратная матрица $\mathbf{H}_k^{(s)}$ порядка n_H ; $\xi(t)$ — центрированный гауссовский белый шум с единичной матрицей интенсивностей.

Коэффициенты сноса и диффузии для этой системы согласно (2.38), (2.40) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{A}^{(s)}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t) \mathbf{u}(t) + \alpha_H^{(s)}(\mathbf{y}, t), \\ \mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{H}^{(s)}(t) \mathbf{y}] [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{H}^{(s)}(t) \mathbf{y}]^T, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\alpha_H^{(s)}(y, t)$ — вектор, i -й элемент которого равен $0,5 \operatorname{tr}\{\mathbf{H}_{(i)}^{(s)*}(t) \times \times [\mathbf{H}^{(s)\top}(t) \mathbf{y} + \mathbf{F}^{(s)}(t)]\}$; $\mathbf{H}_{(i)}^{(s)*}$ — квадратная матрица порядка n_H , kl -й элемент которой равен il -му элементу матрицы $\mathbf{H}_{(k)}^{(s)}$: $\mathbf{H}_{(i)kl}^{(s)*} = \mathbf{H}_{k(il)}^{(s)}$.

Подставляя (4.23) в (4.4), получаем выражения (аргумент t опущен)

$$\begin{aligned}\alpha_p^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} + \alpha_{Hp}^{(s)}, \\ \mathbf{A}_m^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \Theta^{(s)} + \mathbf{A}_{Hm}^{(s)},\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$\mathbf{D}_p^{(s)} = (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{H}^{(s)\top} \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{H}^{(s)\top} \mathbf{m}^{(s)})^\top + \mathbf{H}^{(s)\top} \Theta^{(s)} \mathbf{H}^{(s)},$$

где $\alpha_{Hp}^{(s)}$ — вектор, i -й элемент которого равен $\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{H}_{(i)}^{(s)*} (\mathbf{H}^{(s)\top} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{F}^{(s)})]$; $\mathbf{A}_{Hm}^{(s)}$ — матрица, ij -й элемент которой равен $\frac{1}{2} \operatorname{tr} (\mathbf{H}_{(i)}^{(s)*} \mathbf{H}^{(s)\top} \Theta_j^{(s)})$ ($\Theta_j^{(s)}$ — j -й столбец матрицы $\Theta^{(s)}$).

Уравнения (4.17) для этого случая имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mathbf{m}}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} + \alpha_{Hp}^{(s)} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}), \\ \dot{\Theta}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\top} + \mathbf{A}_{Hm}^{(s)} + \mathbf{A}_{Hm}^{(s)\top} + \\ &\quad + \mathbf{H}^{(s)\top} \Theta^{(s)} \mathbf{H}^{(s)} + (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{H}^{(s)\top} \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{H}^{(s)\top} \mathbf{m}^{(s)})^\top + \\ &\quad + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} [\Theta^{(r)} - \Theta^{(s)} + (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^\top] \\ &\quad (s = \overline{1, n}).\end{aligned}\quad (4.25)$$

При отсутствии мультипликативных возмущений ($\mathbf{g}^{(s)}(t) \equiv 0$, $\mathbf{H}^{(s)}(t) \equiv 0$) уравнения (4.24), (4.25) упрощаются:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mathbf{m}}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}), \quad (4.26) \\ \dot{\Theta}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\top} + \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{G} \mathbf{F}^{(s)\top} + \\ &\quad + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} [\Theta^{(r)} - \Theta^{(s)} + (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^\top] \\ &\quad (s = \overline{1, n}).\end{aligned}$$

Для повышения устойчивости решений уравнений (4.24), (4.25), (4.26) и сокращения времени счета при численном интегрировании целесообразно избавиться от операции деления на $p^{(s)}$. Дело в том, что при уменьшении $p^{(s)}$ снижается степень устойчивости разностных уравнений, соответствующих системам уравне-

ний (4.24), (4.25), (4.26). Кроме того, операция деления — самая трудоемкая из четырех элементарных операций, используемых в ЭВМ.

Перейдя к взвешенным моментам

$$\mu^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y f(y, s) dy, \quad \Psi^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y y^T f(y, s) dy, \quad (4.27)$$

для системы (4.18) получаем следующие уравнения для вероятностных характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mu}^{(s)} &= A^{(s)} \mu^{(s)} + p^{(s)} B^{(s)} u + \frac{1}{2} g^{(s)} \operatorname{tr} [(F^{(s)} p^{(s)} + g^{(s)} \mu^{(s)T}) G] - \\ &\quad - \mu^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \mu^{(r)}, \\ \dot{\Psi}^{(s)} &= \left(A^{(s)} + \frac{1}{2} g^{(s)} g^{(s)T} G \right) \Psi^{(s)} + \Psi^{(s)} \left(A^{(s)} + \frac{1}{2} g^{(s)} g^{(s)T} G \right)^T + \\ &\quad + g^{(s)} g^{(s)T} \operatorname{tr} (G \Psi^{(s)}) + p^{(s)} F^{(s)} G F^{(s)T} + \\ &\quad + \left[F^{(s)} G + \frac{1}{2} I \operatorname{tr} (F^{(s)} G) \right] \mu^{(s)} g^{(s)T} + \\ &\quad + g^{(s)} \mu^{(s)T} \left[F^{(s)} G + \frac{1}{2} I \operatorname{tr} (F^{(s)} G) \right]^T + \\ &\quad + B^{(s)} u \mu^{(s)T} + \mu^{(s)} u^T B^{(s)T} - \Psi^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \Psi^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \\ \Theta &= \Phi - m m^T, \quad \Phi = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)}, \quad m = \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для системы (4.22) аналогичные характеристики определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mu}^{(s)} &= A^{(s)} \mu^{(s)} + p^{(s)} B^{(s)} u + \alpha_{Hp}^{*(s)} - \mu^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \mu^{(r)}, \\ \dot{\Psi}^{(s)} &= A^{(s)} \Psi^{(s)} + \Psi^{(s)} A^{(s)T} + A_{Hm}^{*(s)} + A_{Hm}^{*(s)T} + H^{(s)T} \Psi^{(s)} H^{(s)} + \\ &\quad + p^{(s)} F^{(s)} F^{(s)T} + F^{(s)} \mu^{(s)T} H^{(s)} + H^{(s)T} \mu^{(s)} F^{(s)} + F_H^{(s)} + F_H^{(s)T} + \\ &\quad + B^{(s)} u \mu^{(s)T} + \mu^{(s)} u^T B^{(s)T} - \Psi^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \Psi^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\alpha_{Hp}^{*(s)}$ — вектор, i -й элемент которого равен $\frac{1}{2} \operatorname{tr} [H_{(i)}^{(s)*} \times \times (H^{(s)T} \mu^{(s)} + F^{(s)} p^{(s)})]$; $A_{Hm}^{*(s)}$ — матрица, ij -й элемент которой равен $\frac{1}{2} \operatorname{tr} (H_{(i)}^{(s)*} H^{(s)T} \Psi_j^{(s)})$ ($\Psi_j^{(s)}$ — j -й столбец матрицы $\Psi^{(s)}$).

При отсутствии мультипликативных возмущений ($\mathbf{g}^{(s)}(t) \equiv 0$, $\mathbf{H}^{(s)}(t) \equiv 0$) из (4.28) следует

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mu}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \mu^{(s)} + p^{(s)} \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} - \mu^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \mu^{(r)}, \\ \dot{\Psi}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \Psi^{(s)} + \Psi^{(s)} \mathbf{A}^{(s)T} + p^{(s)} \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{G} \mathbf{F}^{(s)T} + \\ &+ \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{u} \mu^{(s)T} + \mu^{(s)} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^{(s)T} - \Psi^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \Psi^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \\ \Theta &= \Phi - \mathbf{m} \mathbf{m}^T, \quad \Phi = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)}, \quad \mathbf{m} = \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Весьма важным свойством рассмотренных в настоящем параграфе линейных систем с марковской структурой является следующее. Линейные дифференциальные уравнения для вероятностных характеристик (4.21), (4.25), (4.26), (4.28), (4.30) и

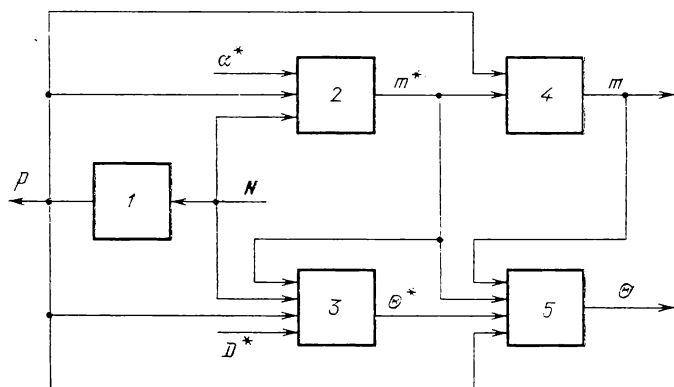


Рис. 4.2. Схема алгоритма определения вероятностных характеристик состояния линейной системы с марковской случайной структурой

(4.31) не зависят от условных плотностей вероятностей $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и точны при любых законах распределения $\mathbf{y}(t_0)$, $s(t_0)$, $\xi(t)$.

Можно, однако, показать (см. § 5.4), что даже при гауссовских распределениях $\mathbf{y}(t_0)$ и $\xi(t)$ и при отсутствии мультипликативных возмущений ($\mathbf{g}^{(s)}(t) \equiv 0$, $\mathbf{H}^{(s)}(t) \equiv 0$) плотности вероятностей $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и $f(\mathbf{y}, t)$ не будут гауссовскими (в отличие от линейных систем с детерминированной структурой и аддитивными гауссовскими возмущениями).

На рис. 4.2, 4.3 приведены структурные схемы алгоритмов определения вероятностных характеристик для линейной системы с марковской структурой и аддитивными возмущениями (уравнения (4.26) и (4.31)). Через $\mathbf{N}$ обозначена матрица интенсивностей переходов $v^{(sr)}$ ($s, r = \overline{1, n}$; $s \neq r$).

Каждый из алгоритмов состоит из трех замкнутых систем линейных дифференциальных уравнений: для $p^{(s)}$, $m^{(s)}$ и для $\Theta^{(s)}$ ($s = 1, n$) либо для $p^{(s)}$, $\mu^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$. Характерной особенностью

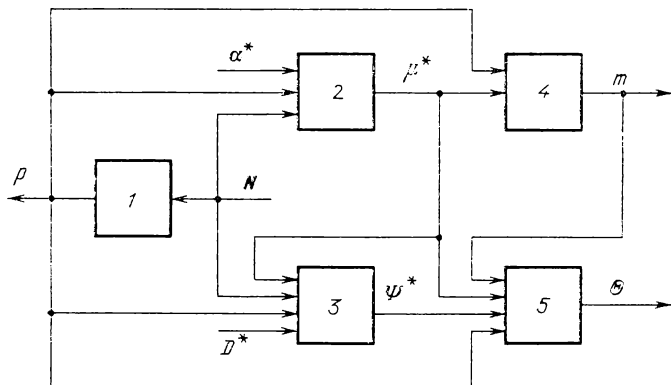


Рис. 4.3. Схема алгоритма определения вероятностных характеристик состояния линейной системы с марковской случайной структурой

является отсутствие обратных связей между этими тремя замкнутыми системами; $p^{(s)}$ не зависит от $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$ (или от $\mu^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$), а $m^{(s)}$ не зависит от $\Theta^{(s)}$ ($\mu^{(s)}$ не зависит от $\Psi^{(s)}$).

§ 4.5. Дискретные системы

В большинстве практических задач алгоритмы анализа систем со случайной структурой решаются численными методами на ЦВМ. Поэтому они должны быть представлены в дискретной форме. Наиболее простой способ получения дискретных алгоритмов для непрерывных систем состоит в приближенной замене дифференциальных уравнений для вероятностных характеристик $f(x, s, t)$, $g(\lambda, s, t)$, $m^{(s)}(t)$, $\Theta^{(s)}(t)$, $p^{(s)}(t)$ уравнениями в конечных разностях. На этом основаны все методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Эти методы реализуются с помощью стандартных программ и не имеют никаких особенностей для систем со случайной структурой.

Недостаток данного подхода — сильная зависимость точности и устойчивости алгоритмов от величины шага счета Δt . Обычно минимальное значение шага определяется ограничениями на время счета и допустимой накопленной ошибкой машинной арифметики, а максимальное значение шага — требуемой точностью вычислений при обеспечении устойчивости решений.

Решения системы дифференциальных уравнений, устойчивые в непрерывном виде, могут потерять устойчивость при дискретном счете в том случае, например, когда переменная покидает область своих значений. Так, по определению, диагональные члены мат-

риц корреляционных моментов $\Theta^{(s)}$ (дисперсии фазовых координат) должны быть неотрицательными, а вероятности $p^{(s)}$ должны лежать в пределах от нуля до единицы. Если в процессе счета эти условия нарушаются, уравнения теряют устойчивость.

Дискретные алгоритмы, устойчивость которых не зависит (или мало зависит) от величины шага Δt , можно вывести, основываясь на дискретной модели системы, заданной стохастическими разностными уравнениями.

Рассмотрим общий вид рекуррентного уравнения, описывающего динамику дискретной системы со случайной структурой (1.6). В § 3.11 для такой системы было получено рекуррентное уравнение (3.144) для плотности вероятности $f[y(k), s(k), k]$ вектора состояния системы. Там же приведены общие уравнения для вероятностных моментов.

Как отмечалось в § 3.11, рекуррентное уравнение (3.144) для плотности вероятности вектора состояния системы $f[y(k), s(k), k]$ может служить основой для вывода приближенных рекуррентных уравнений для вероятностей состояний структуры и моментов фазовых координат. В отличие от разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений путем разложения по Δt , эти рекуррентные уравнения устойчивы относительно шага счета Δt .

Это важно при реализации алгоритмов на ЭВМ, имеющих невысокое быстродействие, особенно при реализации на управляющих ЭВМ, работающих в темпе управляемых ими процессов. Получим приближенные алгоритмы для вычисления вероятностей состояний $p^{(s)}(k)$ и вероятностных моментов $m^{(s)}(k)$, $\Theta^{(s)}(k)$ рассматриваемой дискретной системы со случайной структурой, динамика которой описывается разностным уравнением (1.6). Для вывода этих алгоритмов воспользуемся уравнением (3.144), записав его в форме

$$f(y, s, k+1) = \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y, k+1 | x, s, r, k) \times \\ \times q^{(sr)}(x, k+1, k) f(x, r, k) dx \quad (s = \overline{1, n}), \quad (4.33)$$

где, как уже было отмечено, введены обозначения

$$y \triangleq y(k+1), \quad x \triangleq y(k), \quad s \triangleq s(k+1), \quad r \triangleq s(k), \\ q^{(sr)}(x, k+1, k) \triangleq q[s(k+1), k+1 | s(k), y_k^*(k), k].$$

Используя (4.1), получаем из (4.33)

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(x, k+1, k) f^{(r)}(x, k) dx \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y, k+1 | x, s, r, k) dy,$$

$$m^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(x, k+1, k) \times \\ \times f^{(r)}(x, k) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_{II}(y, k+1 | x, s, r, k) dy, \quad (4.34)$$

$$\Theta^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(x, k+1, k) \times \\ \times f^{(r)}(x, k) dx \int_{-\infty}^{\infty} [y - m^{(s)}(k+1)] [y - m^{(s)}(k+1)]^T \times \\ \times f_{II}(y, k+1 | x, s, r, k) dy \quad (s = \overline{1, n}),$$

где $f^{(r)}(x, k) \triangleq f(y(k), k | s(k))$.

Выполним интегрирование по y в правых частях (4.34). Прежде всего введем следующие обозначения:

$$m^{(sr)}(x, k+1, k) \triangleq M[y, k+1 | x, s, r, k] \triangleq \\ \triangleq M[y(k+1), k+1 | y(k), s(k+1), s(k), k], \\ \varphi^{(sr)}(x, \xi, k+1, k) \triangleq \varphi(x, s, r, \xi, k+1, k) \triangleq \\ \triangleq \varphi[y(k), s(k+1), s(k), \xi(k), k+1, k]$$

С учетом этих обозначений на основании уравнений дискретной системы (1.6) имеем

$$m^{(sr)}(x, k+1, k) = M[\varphi^{(sr)}(x, \xi, k+1, k) | x, s, r]. \quad (4.35)$$

Теперь вычислим интегралы в (4.34). Согласно условию нормировки плотности вероятности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{II}(y, k+1 | x, s, r, k) dy = 1. \quad (4.36)$$

Далее, по определению, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f_{II}(y, k+1 | x, s, r, k) dy = M[y, k+1 | x, s, r, k] \triangleq \\ \triangleq m^{(sr)}(x, k+1, k). \quad (4.37)$$

Преобразуем разность $y - m^{(s)}(k+1)$ к виду

$$y - m^{(sr)}(x, k+1, k) + m^{(sr)}(x, k+1, k) - m^{(s)}(k+1).$$

Подставляя это выражение в (4.34) и учитывая, что на основании (4.37)

$$M\{[y - m^{(sr)}(x, k+1, k)] | x, s, r, k\} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [y - m^{(s)}(k+1)] [y - m^{(s)}(k+1)]^r f_n(y, k+1 | x, s, r, k) dy = \\ = M \{ [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)] [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r + \\ + [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)] [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r | x, s, r, k \} = \\ = \Theta^{(sr)}(x, k+1, k) + [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)] \times \\ \times [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r, \quad (4.38) \end{aligned}$$

где

$$\Theta^{(sr)}(x, k+1, k) \triangleq M \{ [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)] [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r | x, s, r, k \}.$$

Подставляя (4.36) — (4.38) в (4.34), получаем рекуррентные уравнения для вероятностных характеристик:

$$\begin{aligned} p^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(x, k+1, k) f^{(r)}(x, k) dx, \\ m^{(s)}(k+1) &= [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) m^{(sr)}(x, k+1, k) \times \\ &\quad \times q^{(sr)}(x, k+1, k) f^{(r)}(x, k) dx, \quad (4.39) \\ \Theta^{(s)}(k+1) &= [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \{ \Theta^{(sr)}(x, k+1, k) + \\ &\quad + [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)] [m^{(s)}(k+1) - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r \} \times \\ &\quad \times q^{(sr)}(x, k+1, k) f^{(r)}(x, k) dx \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m^{(sr)}(x, k+1, k) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y f_n(y, k+1 | x, s, r, k) dy, \\ \Theta^{(sr)}(x, k+1, k) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)] [y - m^{(sr)}(x, k+1, k)]^r \times \\ &\quad \times f_n(y, k+1 | x, s, r, k) dy. \end{aligned}$$

Условная плотность вероятности перехода $f_n(\cdot)$ определяется формулой (3.91) или любой другой известной формулой для закона распределения случайного вектора $y(k+1)$, связанного детерминированной функциональной зависимостью со случайным вектором $\xi(k)$, закон распределения которого известен.

Как будет показано в п. 4.6.1, для систем с аддитивно-мультипликативными возмущениями находить плотность вероятности перехода $f_n(\cdot)$ не требуется.

Для замыкания системы рекуррентных уравнений (4.39) необходимо, как и в § 4.2, аппроксимировать неизвестные условные

плотности вероятностей $f^{(r)}(\mathbf{x}, k)$ известными функциями, параметрически зависящими только от первых двух искомого моментов $\mathbf{m}^{(r)}(k)$, $\Theta^{(r)}(k)$. Эти функции, как уже говорилось, должны удовлетворять условию нормировки, а интегралы в (4.39) должны выражаться через элементарные или табулированные функции. Что касается выбора аппроксимирующих двухмоментных законов распределения, то здесь остаются справедливыми все рассуждения, сделанные в § 4.2 относительно непрерывных систем.

Безусловные вектор математического ожидания $\mathbf{m}(k)$ и матрица корреляционных моментов $\Theta(k)$ определяются так же, как и для непрерывных систем, по формулам (4.3).

Структурная схема дискретного алгоритма может быть представлена в том же виде, что и схема непрерывного алгоритма (см. рис. 4.1). Однако дискретные алгоритмы 1—3, 6, описываемые выражениями (4.39), отличаются от аналогичных непрерывных алгоритмов (4.3), (4.4). Роль вероятностных коэффициентов (блок 6) в дискретном алгоритме играют интегральные члены в правых частях (4.39).

§ 4.6. Дискретные системы с аддитивно-мультипликативными возмущениями

4.6.1. Нелинейная система с условной марковской структурой.

Пусть система описывается уравнением

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{a}[\mathbf{y}(k), s(k+1), s(k), k+1, k] + \\ + \mathbf{F}[\mathbf{y}(k), s(k+1), s(k), k+1, k] \xi(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (4.40)$$

На основании (4.40) запишем

$$\Phi^{(sr)}(\mathbf{x}, \xi, k+1, k) = \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) + \\ + \mathbf{F}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) \xi(k), \quad (4.41)$$

теперь из (4.35), (4.38), (4.41) следует

$$\mathbf{m}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k), \\ \Theta^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = \mathbf{F}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) \mathbf{G}(k) \mathbf{F}^{(sr)\tau}(\mathbf{x}, k+1, k), \quad (4.42)$$

$$[\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{m}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)] [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{m}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)]^T = \\ = [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)] [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)]^T,$$

где $\mathbf{G}(k)$ — дисперсия дискретного белого шума $\xi(k)$.

Уравнения (4.39) принимают вид

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x}, \\ m^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) \times \\ \times q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x}, \quad (4.43)$$

$$\Theta^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)] \times \\ \times [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k)]^T + \mathbf{F}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) \mathbf{G}(k) \times \\ \times \mathbf{F}^{(sr)T}(\mathbf{x}, k+1, k)\} q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x} \quad (s = \overline{1, n}).$$

Из уравнений алгоритма (4.43) следует, что для дискретной системы с аддитивно-мультипликативными дискретными белыми шумами вероятностные характеристики могут быть приближенно найдены без отыскания условной плотности вероятности перехода $f_n(\mathbf{y}, k+1|\mathbf{x}, s, r, k)$ (в отличие от общего случая (4.39)).

Структурная схема алгоритма остается прежней, лишь упрощается алгоритм определения вероятностных коэффициентов, что видно из сравнения (4.43) с (4.39).

4.6.2. Линейная система с условной марковской структурой.

Пусть система описывается уравнением

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}[s(k+1), s(k), k+1, k] \mathbf{y}(k) + \\ + \mathbf{B}[s(k+1), s(k), k+1, k] \mathbf{u}(k) + \{\mathbf{F}[s(k+1), s(k), k+1, k] + \\ + \mathbf{g}[s(k+1), s(k), k+1, k] \mathbf{y}^T(k)\} \xi(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (4.44)$$

Эта система линейна по отношению к выходному сигналу $\mathbf{y}(k)$.

Запишем уравнение (4.44) в таком виде:

$$\mathbf{y}(k+1) = \{\mathbf{A}[s(k+1), s(k), k+1, k] + \\ + \mathbf{g}[s(k+1), s(k), k+1, k] \xi^T(k)\} \mathbf{y}(k) + \\ + \mathbf{B}[s(k+1), s(k), k+1, k] \mathbf{u}(k) + \\ + \mathbf{F}[s(k+1), s(k), k+1, k] \xi(k). \quad (4.45)$$

Как видно из (4.45), функция $\mathbf{g}[s(k+1), s(k), k+1, k] \xi^T(k)$ описывает параметрические (мультипликативные) возмущения, а функция $\mathbf{F}[s(k+1), s(k), k+1, k] \xi(k)$ — аддитивные возмущения в виде дискретных белых шумов $\xi(k)$, модулированных скачкообразными случайными дискретными процессами

$$\mathbf{g}[s(k+1), s(k), k+1, k], \quad \mathbf{F}[s(k+1), s(k), k+1, k].$$

Данная система на основании (4.42) является частным случаем системы, рассмотренной в предыдущем параграфе. В соответствии с принятыми обозначениями

$$\varphi^{(sr)}(\mathbf{x}, \xi, k+1, k) = \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} + \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k) + \\ + [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x}^T] \xi(k), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} + \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k). \quad (4.47)$$

Из (4.47) и (4.42) следует

$$\mathbf{m}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = \mathbf{a}^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = \\ = \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} + \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k), \\ \Theta^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x}^T] \mathbf{G}(k) \times \\ \times [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x}^T]^T. \quad (4.48)$$

Подставив (4.48) в (4.43), получим

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{m}^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} +$$

$$+ \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)] q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x},$$
(4.49)

$$\Theta^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n p^{(r)}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} -$$

$$- \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)] [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x} - \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)]^T \times$$

$$[\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x}^T] \mathbf{G}(k) [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) +$$

$$+ \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{x}^T]^T\} q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) f^{(r)}(\mathbf{x}, k) d\mathbf{x} \quad (s = \overline{1, n}).$$

4.6.3. Линейная система с марковской структурой. Рассмотрим линейную систему с марковской структурой. Вероятности переходов марковской структуры не зависят от фазовых координат:

$$q[s(k+1), k+1 | s(k), \mathbf{y}(k), k] = q[s(k+1), k+1 | s(k), k].$$

Это частный случай предыдущей системы, для которого имеем $q^{(sr)}(\mathbf{x}, k+1, k) = q^{(sr)}(k+1, k)$. Вследствие независимости $q^{(sr)}(k+1, k)$ от $\mathbf{x}$ уравнения (4.49) упрощаются:

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k),$$

$$\mathbf{m}^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k) \times$$

$$\times [\mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{m}^{(r)}(k) + \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)],$$
(4.50)

$$\Theta^{(s)}(k+1) = [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k) \times$$

$$\times [\mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \Theta^{(r)}(k) \mathbf{A}^{(sr)T}(k+1, k) +$$

$$+ [\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{m}^{(r)}(k) - \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)] \times$$

$$[\mathbf{m}^{(s)}(k+1) - \mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{m}^{(r)}(k) - \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{u}(k)]^T +$$

$$+ [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{m}^{(r)T}(k)] \mathbf{G}(k) \times$$

$$\times [\mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k) + \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \mathbf{m}^{(r)T}(k)]^T +$$

$$+ \mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) \text{tr}[\mathbf{G}(k) \Theta^{(r)}(k)] q^{(sr)T}(k+1, k)\} \quad (s = \overline{1, n}).$$

При отсутствии мультипликативных возмущений $\{g^{(sr)}(k+1, k) \equiv 0\}$ уравнения (4.50) для $\Theta^s(k)$ упрощаются:

$$\begin{aligned} \Theta^{(s)}(k+1) &= [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k) \times \\ &\times \{A^{(sr)}(k+1, k) \Theta^{(r)}(k) A^{(sr)T}(k+1, k) + \\ &+ [m^{(s)}(k+1) - A^{(sr)}(k+1, k) m^{(r)}(k) - B^{(sr)}(k+1, k) u(k)] \\ &\times [m^{(s)}(k+1) - A^{(sr)}(k+1, k) m^{(r)}(k) - B^{(sr)}(k+1, k) u(k)]^T + \\ &+ F^{(sr)}(k+1, k) G(k) F^{(sr)T}(k+1, k)\} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (4.51) \end{aligned}$$

Наиболее удобной формой представления уравнений для составления машинных алгоритмов является форма записи, в которой отсутствует деление на $p^{(s)}(k+1)$. Такие алгоритмы, как уже отмечалось в § 4.4, более устойчивы и имеют меньшее время цикла при счете.

Переходя к переменным

$$\mu^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y f(y, s) dy, \quad \Psi^{(s)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y y^T f(y, s) dy,$$

получаем из (4.50) систему рекуррентных формул для определения вероятностей состояния $p^{(s)}$ и моментов $\mu^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, m , Θ :

$$\begin{aligned} p^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k), \\ \mu^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) [A^{(sr)}(k+1, k) \mu^{(r)}(k) + p^{(r)}(k) B^{(sr)}(k+1, k) u(k)], \\ \Psi^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) \{A^{(sr)}(k+1, k) \Psi^{(r)}(k) A^{(sr)T}(k+1, k) + \\ &+ A^{(sr)}(k+1, k) \mu^{(r)}(k) u^T(k) B^{(sr)T}(k+1, k) + B^{(sr)}(k+1, k) \times \\ &\times u(k) \mu^{(r)T}(k) A^{(sr)T}(k+1, k) + p^{(r)}(k) [B^{(sr)}(k+1, k) u(k) u^T(k) B^{(sr)}(k+1, k) + \\ &+ F^{(sr)}(k+1, k) G(k) F^{(sr)T}(k+1, k)]\}, \\ m(k) &= \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}(k), \quad \Phi(k) = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)}(k), \\ \Theta(k) &= \Phi(k) - m(k) m^T(k). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Следует отметить важную особенность уравнений для вероятностных характеристик линейной системы с марковской структурой. Линейные рекуррентные уравнения (4.50), (4.51), так же как их непрерывный аналог — линейные дифференциальные уравнения, не зависят от условных плотностей вероятностей $f^{(s)}(y(k), k)$

и точны при любых законах распределения $y(0)$, $s(0)$, $\xi(k)$. Однако даже при гауссовских распределениях $y(0)$ и $\xi(k)$ и отсутствии мультипликативных возмущений ($g^{(sr)}(k+1, k) \equiv 0$) условные законы распределения $y(k)$ при фиксированной структуре $s(k)$ будут негауссовскими.

Структурная схема дискретного алгоритма та же, что и у аналогичного непрерывного алгоритма (см. рис. 4.2): уравнения для $p^{(s)}(k)$ не зависят от $m^{(s)}(k)$ и $\Theta^{(s)}(k)$ ($\mu^{(s)}(k)$, $\Psi^{(s)}(k)$), уравнения для $m^{(s)}(k)$ ($\mu^{(s)}(k)$) не зависят от $\Theta^{(s)}(k)$ ($\Psi^{(s)}(k)$) и отсутствует алгоритм определения вероятностных коэффициентов. Линейность алгоритма для $p^{(s)}$, $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$, $\mu^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$ облегчает анализ точности и устойчивости линейных систем с марковской структурой.

§ 4.7. Устойчивость непрерывных систем

При исследовании устойчивости стохастических систем, к которым относятся и системы со случайной структурой, оперируют понятием «стохастическая устойчивость» [54, 77]. Различают несколько видов стохастической устойчивости. Инженера в первую очередь интересует асимптотическая устойчивость в среднеквадратическом, из которой следует и асимптотическая устойчивость в среднем [54]. Практически обычно проводится исследование асимптотической устойчивости по Ляпунову решений системы уравнений для корреляционных моментов. Для линейной системы наличие такой устойчивости гарантирует асимптотическую устойчивость в среднеквадратическом.

Рассмотрим линейную систему с марковской структурой и аддитивно-мультипликативными белыми шумами, описываемую уравнением (4.18).

Вероятностные характеристики этой системы, полученные в § 4.4, точно определяются уравнениями (4.24). Из уравнений (4.24) и рис. 4.2 видно, что в замкнутой системе линейных уравнений для условных корреляционных моментов $\Theta^{(s)}$ вероятности состояний структуры $p^{(s)}$ и условные математические ожидания $m^{(s)}$ являются внешними воздействиями, не зависящими от $\Theta^{(s)}$ ($s = \overline{1, n}$). Поэтому система уравнений для $\Theta^{(s)}$ ($s = \overline{1, n}$) асимптотически устойчива, если асимптотически устойчива соответствующая система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right)^T + \\ & + \mathbf{g}^{(s)} \text{tr}(\mathbf{G} \Theta^{(s)}) \mathbf{g}^{(s)T} + (p^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} (\Theta^{(r)} - \Theta^{(s)}) \quad (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Для того чтобы избавиться от операции деления на $p^{(s)}$ ($s = \overline{1, n}$), некоторые из которых в общем случае могут прини-

мать весьма малые значения (вплоть до нуля), перейдем к переменной $\Omega^{(s)} \triangleq \Theta^{(s)} p^{(s)}$.

Уравнения (4.53) преобразуются к виду

$$\dot{\Omega}^{(s)} = \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right) \Omega^{(s)} + \Omega^{(s)} \left(\mathbf{A}^{(s)} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(s)} \mathbf{g}^{(s)T} \mathbf{G} \right)^T + \\ + \mathbf{g}^{(s)} \text{tr}(\mathbf{G} \Omega^{(s)}) \mathbf{g}^{(s)T} - \Omega^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \Omega^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (4.54)$$

Из систем уравнений (4.53) и (4.54) исключаются; как обычно, уравнения для $\Omega_{ij}^{(s)}$ при $i > j$ ($i, j = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}$), поскольку в силу симметричности матриц $\Omega^{(s)}$ выполняется $\Omega_{ij}^{(s)} = \Omega_{ji}^{(s)}$. С учетом этого число уравнений (4.54) равно $\frac{1}{2} n n_y (n_y + 1)$. Эта система линейных однородных дифференциальных уравнений может быть записана в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}, \quad (4.55)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами $\Omega_{ij}^{(s)}$ ($i, j = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}; i \leq j$); $\mathbf{C}(t)$ — матрица коэффициентов, составленных на основании (4.54).

Если $\mathbf{A}^{(s)}$, $\mathbf{g}^{(s)}$, $v^{(sr)}$, $\mathbf{G}$ — константы, то система (4.55) стационарна. Ее устойчивость можно исследовать известными методами, распространенными на практике. Например, широко используются алгебраические критерии Рауса — Гурвица, частотные критерии Михайлова и Найквиста. Эти методы основаны на анализе характеристического полинома $\mathbf{H}(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Возможно применение и других известных методов исследования устойчивости непрерывных линейных стационарных систем [52, 53].

При $v^{(sr)} = \text{const}$ непрерывная марковская цепь $s(t)$ однородна. Если, кроме того, она эргодична, то, как известно [9], существует предельное (установившееся) распределение вероятностей ее состояний. Это распределение задается линейным алгебраическим матричным уравнением, которое получается из (4.21) при $\dot{p}^{(s)} = 0$ ($s = \overline{1, n}$):

$$\mathbf{N} \mathbf{p} = 0, \quad (4.56)$$

где $\mathbf{N}$ — матрица интенсивностей переходов $v^{(sr)}$; $\mathbf{p}$ — вектор вероятностей $p^{(s)}$ ($s, r = \overline{1, n}$).

Уравнение (4.56) вместе с нормирующим условием

$$\sum_{s=1}^n p^{(s)} = 1 \quad (4.57)$$

однозначно определяет установившееся распределение вероятностей.

Можно показать, что если система (4.54) устойчива, то устойчива также и система линейных однородных уравнений для взвешенных математических ожиданий $\mu^{(s)} \triangleq p^{(s)} m^{(s)}$:

$$\dot{\mu}^{(s)} = A^{(s)} \mu^{(s)} + \frac{1}{2} g^{(s)} \operatorname{tr} (g^{(s)} \mu^{(s)T} G) - \mu^{(s)} \sum_{r \neq s} \nu^{(rs)} + \\ + \sum_{r \neq s} \nu^{(sr)} \mu^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (4.58)$$

Уравнения (4.58) получаются из системы линейных неоднородных уравнений (4.28). При устойчивости уравнений для $p^{(s)}$ из устойчивости для $\mu^{(s)}$ вытекает устойчивость уравнений для $m^{(s)} = \mu^{(s)} / p^{(s)}$, из устойчивости для $\Omega^{(s)}$ — устойчивость для $\Theta^{(s)}$ и на основании (4.1) — устойчивость для Θ .

Таким образом, для того чтобы линейная стационарная система с аддитивно-мультипликативными белыми шумами и случайной структурой в виде эргодической марковской цепи была асимптотически устойчива в среднеквадратическом, необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система линейных дифференциальных уравнений (4.55) с постоянными коэффициентами.

Для систем с переменными параметрами основные рассуждения относительно устойчивости остаются в силе, за исключением неприменимости методов Рауса — Гурвица и частотных критериев устойчивости.

В частном случае, когда мультипликативные (параметрические) шумы отсутствуют ($g^{(s)} \equiv 0$), уравнения (4.54) (и, следовательно, эквивалентные им уравнения (4.55)) упрощаются

$$\dot{\Omega}^{(s)} = A^{(s)} \Omega^{(s)} + \Omega^{(s)} A^{(s)T} - \Omega^{(s)} \sum_{r \neq s} \nu^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \nu^{(sr)} \Omega^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (4.59)$$

Рассмотрим теперь общий случай нелинейной системы со случайной структурой, вероятностные характеристики которой приближенно описываются нелинейными уравнениями (4.3). Как известно, для нелинейной системы нельзя в общем случае говорить об устойчивости в целом, а необходимо исследование устойчивости ее решений в отдельности. В этом состоит отличие от линейной системы, для которой устойчивость любого решения означает устойчивость всех ее решений и, следовательно, устойчивость в целом (то же самое справедливо и в отношении неустойчивости).

Устойчивость решений нелинейных детерминированных систем исследуется либо первым, либо вторым методом Ляпунова. Для исследования устойчивости сложных многомерных систем предпочтительнее использовать первый метод Ляпунова, который, как известно, сводится к составлению уравнений в вариациях с последующим применением инженерных методов Рауса — Гурвица, Найквиста, Михайлова и других методов.

К таким системам относятся, как правило, и системы вида (4.3), число уравнений которых равно $n1\left[+\frac{1}{2}n_y(n_y+3)\right]$, что, например, при $n=2$, $n_y=2$ составляет 12 уравнений.

В заключение отметим еще одну особенность. Для линейной системы с марковской случайной структурой устойчивость или неустойчивость уравнений для вторых моментов означает устойчивость или неустойчивость стохастической системы в среднеквадратическом. Для нелинейной системы со случайной структурой устойчивость или неустойчивость решений системы уравнений для вероятностей и моментов в общем случае не позволяет судить об устойчивости или неустойчивости решений стохастической системы. Это утверждение верно для любых стохастических систем и не зависит от точности приближения уравнений (4.3) для вероятностных характеристик.

Тем не менее суждение об устойчивости (так же, как и об ее точности) на основании исследования уравнений для вероятностей и первых двух моментов во многих задачах инженерной практики оправдано и дает достаточную информацию, необходимую для анализа и проектирования.

§ 4.8. Устойчивость дискретных систем

Все рассуждения, проведенные в отношении непрерывных систем, справедливы и для дискретных систем. Разница состоит лишь в том, что анализируемые уравнения имеют другой вид, а критерии устойчивости — иную формулировку.

Рассмотрим линейную систему с аддитивно-мультипликативными дискретными возмущениями и марковской структурой, описываемую рекуррентным уравнением (4.44).

Вероятностные характеристики этой системы точно определяются уравнениями (4.50). В замкнутой системе уравнений для $\Theta^{(s)}$ ($s=\overline{1, n}$) переменные $p^{(s)}$ и $m^{(s)}$ являются внешними воздействиями. Проведя рассуждения, аналогичные изложенным в § 4.7 для непрерывных систем, придем к задаче анализа устойчивости линейной однородной системы рекуррентных уравнений, получаемых из (4.50):

$$\begin{aligned} \Theta^{(s)}(k+1) = & [p^{(s)}(k+1)]^{-1} \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) p^{(r)}(k) \times \\ & \times \{A^{(sr)}(k+1, k) \Theta^{(r)} A^{(sr)T}(k+1, k) + \\ & + g^{(sr)}(k+1, k) \operatorname{tr} [G(k) \Theta^{(r)}(k)] g^{(sr)T}(k+1, k)\} \quad (s=\overline{1, n}). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Уравнения для $\Omega^{(s)} \triangleq \Theta^{(s)} p^{(s)}$ на основании (4.60) имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega^{(s)}(k+1) = & \sum_{r=1}^n q^{(sr)}(k+1, k) \{A^{(sr)}(k+1, k) \Omega^{(r)}(k) A^{(sr)T}(k+1, k) + \\ & + g^{(sr)}(k+1, k) \operatorname{tr} [G(k) \Omega^{(r)}(k)] g^{(sr)T}(k+1, k)\} \quad (s=\overline{1, n}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k), \quad (4.62)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — вектор с компонентами $\Omega_{ij}^{(s)}(k)$ ($i, j = \overline{1, n_y}; i < j; s = \overline{1, n}$); $\mathbf{C}(k)$ — матрица коэффициентов, составленных на основании (4.61).

Устойчивость системы уравнений (4.62) означает асимптотическую устойчивость в среднеквадратическом стохастической системы (4.44). Соответственно из неустойчивости системы (4.62) следует неустойчивость в среднеквадратическом системы (4.44).

Если исходная стохастическая система имеет постоянные коэффициенты $\mathbf{A}^{(sr)}(k+1, k) = \mathbf{A}^{(sr)}$, $\mathbf{g}^{(sr)}(k+1, k) = \mathbf{g}^{(sr)}$, $\mathbf{G}(k) = \mathbf{G}$, а структура системы описывается эргодической марковской цепью с вероятностями переходов $p^{(sr)}(k+1, k) = p^{(sr)}$, то $\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}$. В этом случае устойчивость системы (4.62) можно исследовать известными методами, основываясь на анализе характеристического полинома $\mathbf{H}(z) = \det(\mathbf{C} - z\mathbf{I})$ [53].

В отношении нелинейных систем со случайной структурой можно полностью повторить все рассуждения и выводы, проведенные в § 4.7 относительно аналогичных непрерывных систем. Вероятности состояний и моменты нелинейной системы (1.6) приближенно определяются рекуррентными уравнениями (4.34). Исследование устойчивости заключается в анализе устойчивости решений этих уравнений известными методами [53].

§ 4.9. Выбор и преобразования множества состояний структуры

Изменения структуры динамических систем, рассматриваемых в настоящей книге, описываются марковскими процессами с конечным числом состояний. Поэтому множество состояний структуры образует полную группу несовместных событий. В прикладных задачах изменения структуры системы обычно обусловлены сменой структуры ее подсистем и, в частности, скачками параметров. Как правило, невозможно простым объединением множеств состояний структур подсистем образовать множество состояний структуры всей системы, удовлетворяющее условию несовместности.

В частности, если какие-нибудь два состояния разных подсистем независимы, то они обязательно совместны. Например, каждый из двух независимых скачкообразных параметров имеет состояния, каждое из которых формально (математически) совместно с любым состоянием другого параметра. Фактически некоторые состояния могут быть несовместны физически, что оговаривается в условиях задачи. При этом, разумеется, нарушается независимость параметров.

Рассмотрим процедуру образования множества состояний структуры. Пусть система со случайной структурой содержит m

подсистем со случайной структурой S_i , каждая из которых имеет конечное число состояний $s_i^{(1)}, s_i^{(r)}, \dots, s_i^{(l_i)}$ ($i = \overline{1, m}$). Например, система содержит m случайных скачкообразных параметров, где i -й параметр имеет конечное число состояний l_i ($i = \overline{1, m}$).

Для непрерывной системы каждая структура S_i задается в общем случае условными функциями поглощения и восстановления $\beta_i^{(rq)}(y, \bar{s}_i, t)$ и $\gamma_i^{(qr)}(y, \bar{s}_i, t)$, которые соответствуют переходам из состояния $s_i^{(q)}$ в $s_i^{(r)}$ и обратно при фиксированном векторе $\bar{s}_i$ структур всех подсистем, кроме i -й ($q, r = \overline{1, l_i}; q \neq r; i = \overline{1, m}$).

Для непрерывной системы с условной марковской структурой каждая структура S_i задается условными интенсивностями перехода $v_i^{(qr)}(y, \bar{s}_i, t)$ при фиксированном $\bar{s}_i$ и фиксированном векторе фазовых координат всей системы y . Для дискретной системы аналогичной характеристикой служат вероятности переходов $p_i^{(qr)}(y, \bar{s}_i, k)$.

Образует все формально возможные сочетания из состояний подсистем:

$$\alpha\beta \dots \omega \triangleq s_1^{(\alpha)} s_2^{(\beta)} \dots s_m^{(\omega)}. \quad (4.63)$$

Общее число этих сочетаний равно $\prod_{i=1}^m l_i$. Исключив из их числа физически невозможные сочетания и перенумеровав оставшиеся от 1 до n , получим структуру S с n состояниями, образующими полную группу несовместных событий.

Отметим два свойства характеристик переходов структуры S .

1. Если два состояния $q \triangleq \alpha\beta \dots \delta \dots \omega$ и $r \triangleq \alpha\beta \dots \epsilon \dots \omega$, определяемые выражением (4.63), отличаются друг от друга одним и только одним i -м индексом (δ или ϵ) (смена состояния только одной i -й подсистемы), то характеристики переходов определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \beta^{(rq)}(y, t) &= \beta_i^{(\epsilon\delta)}(y, \bar{s}_i, t), & \gamma^{(qr)}(y, t) &= \gamma_i^{(\delta\epsilon)}(y, \bar{s}_i, t), \\ v^{(qr)}(y, t) &= v_i^{(\delta\epsilon)}(y, \bar{s}_i, t), & p^{(qr)}(y, k) &= p_i^{(\delta\epsilon)}(y, \bar{s}_i, k). \end{aligned} \quad (4.64)$$

2. Для непрерывных систем с условной марковской и марковской структурами любые два состояния q и r , отличающиеся друг от друга более чем одним индексом в выражении (4.63), имеют интенсивности взаимных переходов, равные нулю.

Первое свойство вытекает непосредственно из определения состояний q и r . Второе свойство следует из свойства непрерывной марковской цепи, согласно которому вероятность смены состояния каждой подсистемы на интервале Δt есть величина порядка Δt . Следовательно, вероятность одновременной смены состояний двух и более подсистем — величина высшего порядка малости, чем Δt .

Для дискретных систем второе свойство в общем случае несправедливо, вероятность смены состояний двух и более подси-

стем в течение одного интервала дискретности может заметно отличаться от нуля.

То же самое можно сказать и в отношении систем с переменной структурой. Изменения структуры этих систем, по определению, детерминированно зависят от фазовых координат. Поэтому может оказаться, что при достижении некоторой переменной своего граничного значения несколько подсистем одновременно скачком изменяют свое состояние.

Если исследователя интересуют в конкретной задаче не все вероятности состояний структуры и соответствующие им условные вероятностные моменты, то в целях экономии времени счета желательно уменьшить число состояний структуры или хотя бы упростить уравнения. Однако в общем случае этого сделать не

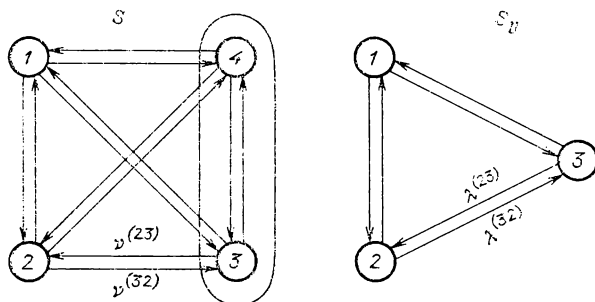


Рис. 4.4. Преобразование множества состояний структуры путем объединения группы состояний

удается. Упростить систему уравнений без потери точности решения можно только для рассматриваемого ниже частного случая.

Пусть среди n состояний структуры S имеется $n-l+1$ состояний ($s = \overline{l, n}$), смена которых не изменяет уравнений для фазовых координат. Математически это условие записывается в виде

$$\varphi^{(s)}(y, \xi, t) = \varphi^{(r)}(y, \xi, t) \quad (s, r = \overline{l, n}). \quad (4.65)$$

Объединив эти $n-l+1$ состояний в одно, получаем структуру S_U с числом состояний l ($s = \overline{1, l}$). Обозначим интенсивности переходов структуры S_U через $\lambda^{(sr)}(y, t)$ (рис. 4.4). Запишем обобщенные уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для системы со структурой S_U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_U(y, s, t)}{\partial t} = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} [\alpha_{U i}^{(s)}(y, t) f_U(y, s, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [D_{U ij}^{(s)}(y, t) f_U(y, s, t)] - f_U(y, s, t) \sum_{r=1 \neq s}^l \lambda^{(rs)}(y, t) + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^l \lambda^{(sr)}(y, t) f_U(y, r, t) \quad (s = \overline{1, l}), \end{aligned} \quad (4.66)$$

где коэффициенты сноса и диффузии $\alpha_U^{(s)}(y, t)$, $D_U^{(s)}(y, t)$ на основании (4.44) связаны с аналогичными коэффициентами исходной системы соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha_U^{(s)}(y, t) &= \alpha^{(s)}(y, t), \quad D_U^{(s)}(y, t) = D^{(s)}(y, t) \quad (s = \overline{1, l-1}), \\ \alpha_U^{(l)}(y, t) &= \alpha^{(s)}(y, t), \quad D_U^{(l)}(y, t) = D^{(s)}(y, t) \quad (s = \overline{l, n}).\end{aligned}\quad (4.67)$$

На основании условий задачи имеем

$$\begin{aligned}f_U(y, s, t) &= f(y, s, t) \quad (s = \overline{1, l-1}), \\ f_U(y, l, t) &= \sum_{r=l}^n f(y, r, t),\end{aligned}\quad (4.68)$$

$$f_U^{(l)}(y, t) = [p_U^{(l)}(t)]^{-1} \sum_{r=l}^n p^{(r)}(t) f^{(r)}(y, t),$$

где

$$p_U^{(l)}(t) = \sum_{r=l}^n p^{(r)}(t). \quad (4.69)$$

Дифференцируя (4.68) по t и подставляя результаты в (4.66), путем сравнения коэффициентов при одинаковых $f(y, s, t)$ в полученных уравнениях и уравнениях (3.72) получаем с учетом (4.65) выражения для $\lambda^{(sr)}(y, t)$:

$$\begin{aligned}\lambda^{(sr)}(y, t) &= \gamma^{(sr)}(y, t) \quad (s, r = \overline{1, l-1}), \\ \lambda^{(ls)}(y, t) &= \sum_{r=l}^n \gamma^{(rs)}(y, t) \quad (s = \overline{1, l-1}),\end{aligned}\quad (4.70)$$

$$\lambda^{(sl)}(y, t) = [p_U^{(l)}(t)]^{-1} \sum_{r=l}^n \gamma^{(sr)}(y, t) p^{(r)}(t) \quad (s = \overline{1, l-1}).$$

Из формул (4.70) видно, что интенсивности переходов преобразованной структуры $\lambda^{(sr)}(y, t)$ зависят от вероятностей состояний исходной структуры $p^{(s)}(t)$ ($s = \overline{1, n}$).

Нахождение вероятностей $p^{(s)}(t)$ путем интегрирования по y плотностей $f(y, s, t)$ не решает поставленной задачи упрощения уравнения, так как определение $f(y, s, t)$ путем решения (3.72), как уже отмечалось, весьма трудоемкая задача.

Вероятности $p^{(s)}(t)$ приближенно определяются уравнениями (4.12):

$$\dot{p}^{(s)}(t) = -p^{(s)}(t) \sum_{r \neq s} \gamma_p^{(rs)}(t) + \sum_{r \neq s} \gamma_p^{(sr)}(t) p^{(r)}(t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (4.71)$$

На основании (4.68) вероятности $p_U^{(s)}(t)$ находятся по формулам

$$p_U^{(s)}(t) = p^{(s)}(t) \quad (s = \overline{1, l-1}), \quad p_U^{(l)}(t) = \sum_{r=l}^n p^{(r)}(t). \quad (4.72)$$

Вероятностные коэффициенты $v_p^{(rs)}(t)$, $v_p^{(sr)}(t)$, определяемые выражениями (4.11), зависят от моментов $m^{(s)}(t)$, $\Theta^{(s)}(t)$. Поэтому для замыкания системы уравнений для $p^{(s)}(t)$ необходимо дополнить уравнения (4.71) уравнениями моментов. С этой целью можно использовать уравнения моментов системы с более простой структурой S_U , поскольку на основании (4.68) имеем

$$\begin{aligned} m_U^{(s)}(t) &= m^{(s)}(t), & \Theta_U^{(s)}(t) &= \Theta^{(s)}(t) & (s = \overline{1, l-1}), \\ m_U^{(l)}(t) &= m^{(s)}(t), & \Theta_U^{(l)}(t) &= \Theta^{(s)}(t) & (s = \overline{l, n}). \end{aligned}$$

Таким образом, к уравнениям (4.71), (4.72) добавляются приближенные уравнения (4.12) для моментов (аргумент t опущен для простоты записи):

$$\begin{aligned} \dot{m}_U^{(s)} &= \alpha_{pU}^{(s)} - \lambda_m^{(s)} + (p_U^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \lambda_m^{(sr)} p_U^{(r)}, \\ \dot{\Theta}_U^{(s)} &= A_{mU}^{(s)} + A_{mU}^{(s)\tau} + D_{pU}^{(s)} - \Lambda_{\Theta}^{(s)} + (p_U^{(s)})^{-1} \sum_{r \neq s} \Lambda_{\Theta}^{(sr)} p_U^{(r)}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

где коэффициенты $\alpha_{pU}^{(s)}(t)$, $A_{mU}^{(s)}(t)$, $D_{pU}^{(s)}(t)$ определяются выражениями (4.4), в которые вместо $\alpha^{(s)}(y, t)$, $D^{(s)}(y, t)$ подставляются $\alpha_U^{(s)}(y, t)$, $D_U^{(s)}(y, t)$, определяемые формулами (4.67), а коэффициенты $\lambda_m^{(s)}$, $\lambda_m^{(sr)}$, $\Lambda_{\Theta}^{(s)}$, $\Lambda_{\Theta}^{(sr)}$ определяются выражениями (4.11), в которые вместо $v^{(sr)}(y, t)$ подставляются $\lambda^{(sr)}(y, t)$, определяемые формулами (4.70). Эти коэффициенты зависят от моментов $m_U^{(s)}$, $\Theta_U^{(s)}$.

Итак, система приближенных уравнений для определения вероятностей состояний преобразованной структуры S_U с l состояниями ($l < n$) и соответствующих этим состояниям условных моментов составляется из (4.70) — (4.73) и (4.11).

Порядок этой системы уравнений на 2 ($n - l - 1$) меньше порядка системы уравнений для исходной структуры S . Следует отметить, что в силу (4.70), (4.71) в ходе решения задачи вычисляются не только интересующие нас $p^{(s)}(t)$ при $s = \overline{1, l}$, но и $p^{(s)}(t)$ при $s = \overline{l, n}$.

Для систем с марковской структурой интенсивности $v^{(sr)}(t)$ и, следовательно, $\lambda^{(sr)}(t)$ не зависят от фазовых координат. Поэтому уравнения (4.73) упрощаются:

$$\begin{aligned} \dot{m}_U^{(s)} &= \alpha_{pU}^{(s)} + (p_U^{(s)})^{-1} \sum_{(r \neq s)} \lambda^{(sr)} p_U^{(r)} (m_U^{(r)} - m_U^{(s)}), \\ \dot{\Theta}_U^{(s)} &= A_{mU}^{(s)} + A_{mU}^{(s)\tau} + D_{pU}^{(s)} + (p_U^{(s)})^{-1} \sum_{(r \neq s)} \lambda^{(sr)} p_U^{(r)} \times \\ &\quad \times [\Theta_U^{(r)} - \Theta_U^{(s)} + (m_U^{(r)} - m_U^{(s)})(m_U^{(r)} - m_U^{(s)})^{\tau}] \quad (s = \overline{1, l}). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Уравнения (4.71) для вероятностей состояний не зависят теперь от моментов $m_U^{(s)}$, $\Theta_U^{(s)}$ и определяются уравнениями

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}. \quad (4.75)$$

Вероятности $p_U^{(s)}(t)$ по-прежнему находятся по формулам (4.72), а интенсивности $\lambda^{(sr)}(t)$ — по формулам (4.70).

Если преобразование $S \rightarrow \bar{S}_U$ состоит из объединения нескольких групп состояний структуры S в несколько состояний

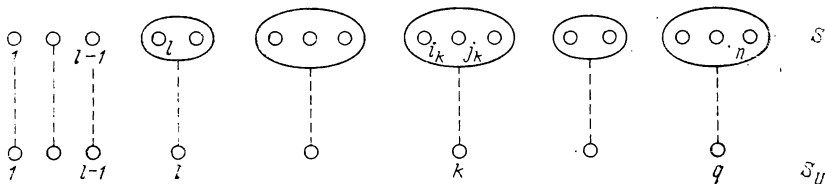


Рис. 4.5. Преобразование множества состояний структуры путем нескольких объединений групп состояний

структуры S_U (рис. 4.5), то система уравнений (4.70) — (4.73) в принципе не изменяется, лишь в соответствии с рис. 4.4 меняются индексы в (4.70) и (4.72):

$$\begin{aligned} \lambda^{(sr)}(y, t) &= v^{(sr)}(y, t) \quad (s, r = \overline{1, l-1}), \\ \lambda^{(hs)}(y, t) &= \sum_{r=i_h}^{j_h} v^{(rs)}(y, t) \quad (s = \overline{1, l-1}), \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\lambda^{(sh)}(y, t) = [p_U^{(h)}(t)]^{-1} \sum_{r=i_h}^{j_h} v^{(sr)}(y, t) p^{(r)}(t) \quad (s = \overline{1, l-1}; k = \overline{l, q}),$$

$$p_U^{(s)}(t) = p^{(s)}(t) \quad (s = \overline{1, l-1}),$$

$$p_U^{(h)}(t) = \sum_{r=i_h}^{j_h} p^{(r)}(t) \quad (k = \overline{l, q}).$$

Уравнения (4.71) остаются без всякого изменения, а в (4.73) индекс s изменяется от 1 до q .

§ 4.10. Способы определения интенсивностей переходов

Матрица интенсивностей переходов (для дискретных систем — вероятностей переходов) является основной характеристикой структуры. Однако практически найти интенсивности переходов непросто. Исходные данные для нахождения интенсивностей получаются в результате физического эксперимента, полунатурного или математического моделирования.

Ряд трудностей происходит от того, что имитационная модель и модель исходная (т. е. та, на основании которой составляются уравнения для вероятностных характеристик $p^{(s)}$, $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$), как правило, неодинаковы. Дело в том, что имитационную модель

обычно стремятся сделать достаточно полной, а исходную модель для метода двухмоментной аппроксимации приходится упрощать.

Рассмотрим некоторые способы нахождения интенсивностей переходов. Прежде всего необходимо привести в соответствие множества состояний структур обеих моделей таким образом, чтобы каждому состоянию структуры упрощенной модели соответствовало одно состояние или группа состояний имитационной модели (см. рис. 4.4).

Первый способ определения интенсивностей основан на применении формул (4.76). Интенсивности переходов в имитационной модели $v^{(sr)}(y, t)$ заданы. Вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ определяются в результате статистических испытаний имитационной модели. Если в системе в течение достаточно длительного времени T существует стационарное (предельное) распределение вероятностей, то вероятность $p^{(s)}$ определяется как относительная доля времени, проведенная структурой в состоянии s :

$$p^{(s)} = T^{(s)} T^{-1}, \quad (4.77)$$

где $T^{(s)}$ — часть времени, проведенная в состоянии s за время T .

В противном случае, когда стационарного режима не существует или он кратковременен, вероятность $p^{(s)}(t)$ определяется как частота пребывания структуры в состоянии s , вычисленная для каждого момента времени из последовательности $t_i \in [0, T]$ (т. е. отношение числа пребываний структуры в состоянии s в момент t к общему числу опытов).

Зная $v^{(sr)}(y, t)$, $p^{(s)}(t)$ ($s, r = \overline{1, n}$), находим интенсивности переходов упрощенной модели $\lambda^{(sr)}(y, t)$ ($s, r = \overline{1, q}$) по формулам (4.76).

Для натурального или полунатурного моделирования интенсивности переходов $v^{(sr)}(y, t)$ чаще всего неизвестны. Трудно определить интенсивности $v^{(sr)}(y, t)$ и для сложных имитационных моделей с переменной или условной марковской структурой.

Второй способ не требует знания интенсивностей $v^{(sr)}(y, t)$ для определения интенсивностей $\lambda^{(sr)}(y, t)$ упрощенной модели. Если эта модель имеет марковскую структуру и, кроме того, в физической или имитационной модели устанавливается режим, стационарный относительно распределения вероятностей $p^{(s)}$, то интенсивность $\lambda^{(sr)}$ определяется приближенно как величина, обратная среднему промежутку времени перехода из состояния r в состояние s [9]:

$$\lambda^{(sr)} = (M[T^{(sr)}])^{-1} \quad (s, r = \overline{1, q}). \quad (4.78)$$

Формула (4.78) справедлива при допущении, что упрощенная и имитационная (или физическая) модели эквивалентны в смысле равенства математических ожиданий промежутков времени перехода из одного состояния в другое.

Когда средняя частота переходов сравнительно велика, то необходимую статистику для определения $M\{T^{(sr)}\}$ можно на-

брать в одной реализации. В противном случае требуется повторение опытов.

Если распределение вероятностей состояний структуры имитационной модели нестационарно, то при выполнении некоторых условий можно применить третий способ определения интенсивностей переходов. Этот способ основан на гипотезе кусочной стационарности процесса изменения структуры.

Согласно этой гипотезе время работы системы разбивается на несколько интервалов ΔT_i ($i = 1, m$), на каждом из которых предполагается существование режима, стационарного в смысле вероятностей состояний структуры. Это предположение можно проверить, прибегнув, например, к методике определения вероятностей первым способом, описанным выше.

Число интервалов m выбирается как компромисс между точностью решения и экономией времени счета. Интервалы ΔT_i могут быть и не равны между собой, но в любом случае длительность интервала ΔT_i должна превышать величину максимального из зафиксированных случайных промежутков времени перехода $T_i^{(sr)}$:

$$\Delta T_i > \max T_i^{(sr)}.$$

На основании гипотезы о кусочной стационарности процесса изменения структуры интенсивности $\lambda^{(sr)}(t)$ определяются приближенно в дискретных точках t_i по формуле

$$\lambda^{(sr)}(t_i) = (M[T_i^{(sr)}])^{-1}, \quad (4.79)$$

где t_i — точка, соответствующая середине интервала ΔT_i ($i = \overline{1, m}$; $s, r = \overline{1, q}$).

Если изменение структуры представляет собой процесс существенно нестационарный относительно вероятностей состояний и приближенной количественной характеристикой этого может служить неравенство

$$\left| \frac{M[T_{i+1}^{(sr)}] - M[T_i^{(sr)}]}{M[T_i^{(sr)}]} \right| > 1 \quad (4.80)$$

и, кроме того, число переходов из r в s за время работы системы не превышает нескольких единиц, то допущение о кусочной стационарности процесса может оказаться слишком грубым.

В этом случае рекомендуется применять четвертый способ определения интенсивностей переходов, который состоит в следующем. Выделим случайные промежутки времени $T^{(sr)}$ перехода из r в s (рис. 4.6). Сгруппируем их в m групп по признаку близости моментов времени начала промежутков $t_{ин}$. Построим для каждой из этих групп статистическую функцию распределения $F_i^{*(sr)}(t)$ случайной величины $T_i^{(sr)}$. Аппроксимируем

$F_i^{*(sr)}(t)$ функцией $F^{(sr)}(t, t_i)$ вида

$$F^{(sr)}(t, t_i) = \begin{cases} 1 - \exp[\varphi^{(sr)}(t_i) - \varphi^{(sr)}(t)], & t \geq t_i, \\ 0, & t < t_i, \end{cases} \quad (4.81)$$

$$(i = \overline{1, m}; \quad s, r = \overline{1, q}; \quad s \neq r),$$

где $t_i = M[t_{iH}]$ ($i \neq 1$; $t_1 = 0$); $\varphi^{(sr)}(t)$ — любая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^{(sr)}(t) = \infty$.

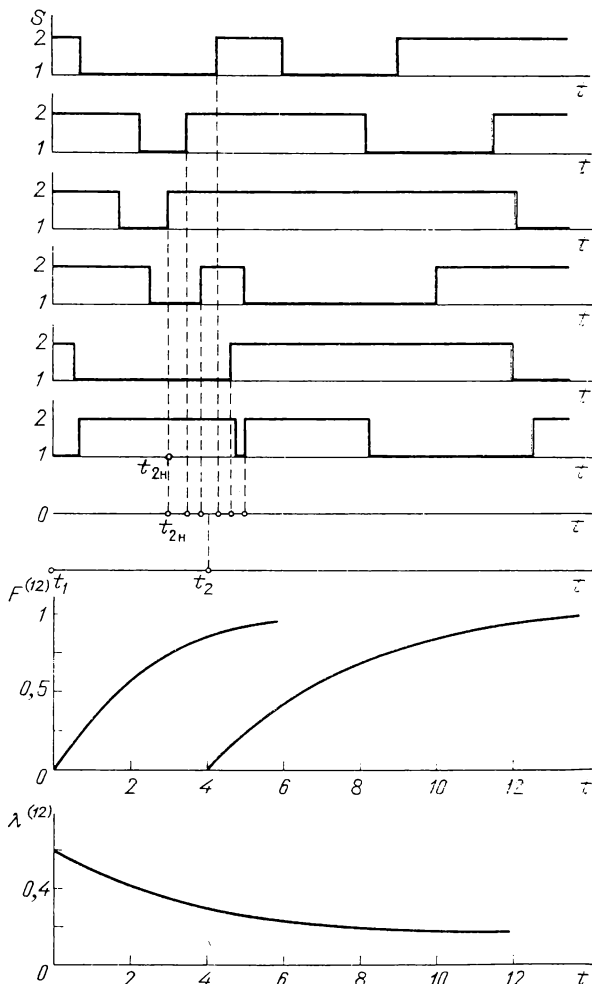


Рис. 4.6. Экспериментальное определение интенсивности переходов неоднородной марковской цепи

Закон распределения промежутка $T_i^{(sr)}$ вида (4.81) соответствует неоднородной марковской цепи с интенсивностью перехода

$\lambda^{(sr)}(t)$, определяемой формулой [9]

$$\lambda^{(sr)}(t) = \frac{dF^{(sr)}(t, t_i)}{dt} [1 - F^{(sr)}(t, t_i)]^{-1}. \quad (4.82)$$

При этом, как следует из (4.81), (4.82), интенсивность $\lambda^{(sr)}(t)$ определяется по формуле

$$\lambda^{(sr)}(t) = \frac{d\varphi^{(sr)}(t)}{dt} \quad (4.83)$$

и не зависит от t_i , что характеризует отсутствие последствия — основное свойство марковских процессов.

Выражение (4.81) охватывает широкий круг законов распределения, встречающихся на практике. Им соответствует столь же обширный класс интенсивностей переходов. Например, для

$$\varphi^{(sr)}(t) = \sum_{n=1}^N a_n^{(sr)} t^n + a_0$$

имеем убывающую функцию вида

$$\lambda^{(sr)}(t) = \sum_{n=1}^N n a_n^{(sr)} t^{n-1},$$

а для

$$\varphi^{(sr)}(t) = \ln \left(\sum_{n=1}^N a_n^{(sr)} t^n + a_0 \right)$$

— невозрастающую функцию вида

$$\lambda^{(sr)}(t) = \sum_{n=1}^N n a_n^{(sr)} t^{n-1} \left(\sum_{n=1}^N a_n^{(sr)} t^n + a_0 \right)^{-1} \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

На рис. 4.6 приведен пример, в котором

$$F^{(12)}(t, t_i) = 1 - \left(\frac{0,2t_i + 1}{0,2t + 1} \right)^3, \quad t \geq t_i; \quad \lambda^{(12)}(t) = \frac{0,6}{0,2t + 1}.$$

Таким образом, интенсивности переходов структуры упрощенной модели, по которой строятся уравнения для вероятностных характеристик $p^{(s)}$, $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$, могут быть найдены из эксперимента или статистического имитационного моделирования одним из четырех способов, описанных выше.

Первый способ наиболее универсален. Он годится для анализа систем с марковской структурой, с условной марковской и с переменной структурами. Однако он требует знания интенсивностей переходов имитационной или физической модели, а это условие на практике далеко не всегда выполняется.

Последние три способа не требуют знания интенсивностей переходов имитационной или физической модели, но они предназначены только для определения интенсивностей переходов марковской системы.

Исчерпывающей характеристикой переменной структуры является *матрица функций поглощения и восстановления реализаций*, которая полностью определена заданием уравнений для фазовых координат.

Наиболее трудно находить интенсивности переходов условной марковской структуры при неизвестных интенсивностях переходов имитационной модели. Универсального способа решения этой задачи в общем случае нет. Можно рекомендовать применять описанные выше способы в сочетании с неформализованными так называемыми инженерными методами, исходя из специфики задачи.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

§ 5.1. Виды внешних марковских скачкообразных воздействий

Уравнения непрерывной нелинейной динамической системы (1.1) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\varphi^{(s)}(\mathbf{y}) + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u}(t) + [\mathbf{F}^{(s)}(t) + \mathbf{g}^{(s)}(t)\Psi^{(s)\top}(\mathbf{y})]\bar{\mathbf{g}}(t) \quad (s = \overline{1, n}), \quad (5.1)$$

где $s(t)$ — индекс структуры системы — марковская цепь; $\varphi^{(s)}(\mathbf{y})$ и $\psi^{(s)}(\mathbf{y})$ — некоторые нелинейные функции $\mathbf{y}$; $\xi(t)$ — векторный гауссовский белый шум; $\mathbf{u}(t)$ — векторный детерминированный входной сигнал.

Уравнение (5.1) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} = & \mathbf{A}[s(t), t] \varphi[s(t), \mathbf{y}] + \mathbf{B}[s(t), t] \mathbf{u}(t) + \\ & + \{\mathbf{F}[s(t), t] + \mathbf{g}[s(t), t] \psi^T[s(t), \mathbf{y}]\} \mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Так как марковская цепь $s(t)$, по определению, не зависит от вектора фазовых координат y , то функцию $s(t)$ и все функции

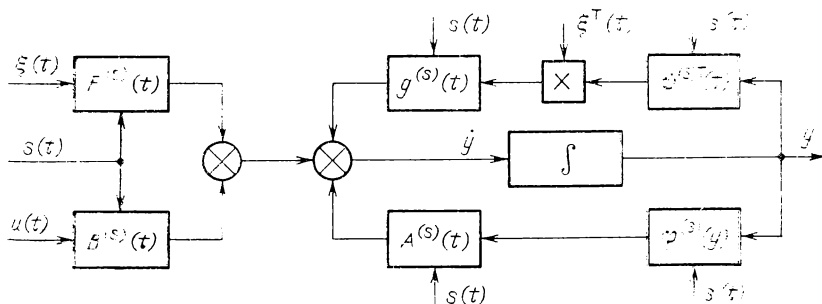


Рис. 5.1. Виды марковских скачкообразных воздействий

времени t в (5.2), зависящие от нас, можно рассматривать как внешние марковские скачкообразные воздействия.

Применим к этому с помощью структурной схемы (рис. 5.1, где учтено, что $\psi^{(s)\tau}(\mathbf{y})\xi(t) = \xi^{\tau}(t)\psi^{(s)}(\mathbf{y})$).

Преобразуем эту схему к виду, изображенному на рис. 5.2. Преобразованной схеме соответствуют уравнения вида

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\boldsymbol{\varphi}^{(s)}(\mathbf{y}) + \mathbf{v}^{(s)}(t) + \boldsymbol{\zeta}^{(s)}(t) + \boldsymbol{\Xi}^{(s)}(t)\boldsymbol{\psi}^{(s)}(\mathbf{y}), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(s)}(t) &= \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u}(t); \quad \boldsymbol{\zeta}^{(s)}(t) = \mathbf{F}^{(s)}(t)\boldsymbol{\xi}(t); \\ \boldsymbol{\Xi}^{(s)}(t) &= \mathbf{g}^{(s)}(t)\boldsymbol{\xi}^T(t). \end{aligned}$$

Сравнение уравнений (5.2) и (5.3) показывает, что они эквивалентны. Следовательно, эквивалентны и соответствующие им структурные схемы, изображенные на рис. 5.1 и 5.2.

Как видно из рис. 5.2 и уравнений (5.3), функции $s(t)$, $\mathbf{v}^{(s)}(t)$, $\boldsymbol{\zeta}^{(s)}(t)$, $\mathbf{A}^{(s)}(t)$, $\boldsymbol{\Xi}^{(s)}(t)$ можно рассматривать как внешние

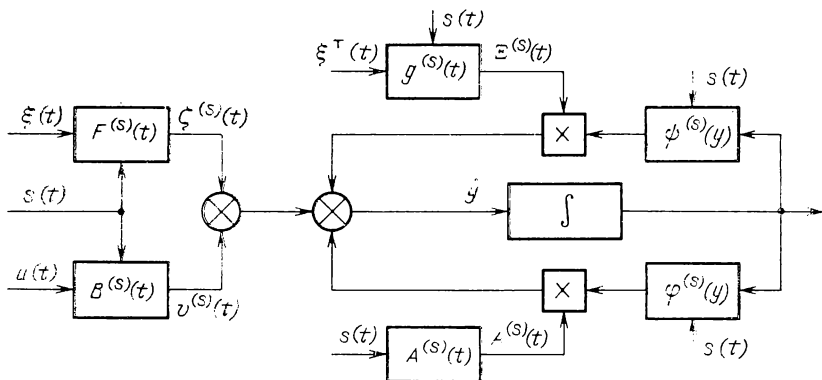


Рис. 5.2. Представление марковских скачкообразных воздействий в виде внешних воздействий

марковские скачкообразные воздействия. По способу действия на систему их можно разделить на *аддитивные* (входные), *мультипликативные* (параметрические) и *функциональные* (логические). Входными воздействиями являются $v^{(s)}(t)$ и $\zeta^{(s)}(t)$, параметрическими — $\mathbf{A}^{(s)}(t)$ и $\boldsymbol{\Xi}^{(s)}(t)$. Логическим (функциональным) воздействием можно считать $s(t)$, но только при наличии функций $\boldsymbol{\varphi}^{(s)}(\mathbf{y})$ или $\boldsymbol{\psi}^{(s)}(\mathbf{y})$, зависящих от индекса структуры. Если при изменении $s(t)$ нелинейные функциональные зависимости $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$ не меняются (логика системы детерминирована), то $s(t)$ мы не будем рассматривать как внешнее логическое воздействие, поскольку его влияние учитывается в других воздействиях, а непосредственное влияние (через $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$) отсутствует.

По вероятностным свойствам внешние воздействия делятся на два класса: детерминированные сигналы, модулированные марковскими скачкообразными процессами, и модулированные таким же способом белые шумы. К первому классу относятся $s(t)$, $v^{(s)}(t)$ и $\mathbf{A}^{(s)}(t)$, ко второму классу — $\zeta^{(s)}(t)$, $\boldsymbol{\Xi}^{(s)}(t)$.

Внешним воздействиям можно придать следующий физический смысл. Обычно воздействия $v^{(s)}(t)$ описывают аддитивные

управляющие сигналы; $A^{(s)}(t)$ — параметры системы и мультипликативные управляющие сигналы; $\xi^{(s)}(t)$ — аддитивные широкополосные (с равномерным спектром в полосе пропускания системы) флуктуационные возмущения (включая помехи и ошибки измерителей), а также — белые шумы, формирующие с помощью фильтров узкополосные (с неравномерным спектром в полосе пропускания системы) флуктуационные возмущения; $\Xi^{(s)}(t)$ аналогично $\xi^{(s)}(t)$ описывают соответствующие параметрические флуктуационные возмущения; наконец, $\varphi^{(s)}(y)$ и $\psi^{(s)}(y)$ как функции $s(t)$ используются для моделирования случайных скачкообразных изменений, происходящих в нелинейных функциональных зависимостях под влиянием внешних причин.

Таким образом, формально все системы с марковской структурой можно рассматривать как системы с внешними случайными скачкообразными воздействиями. Для их анализа применимы методы, изложенные в § 4.4 (непрерывные системы) и в п. 4.6.2 (дискретные системы).

Однако из физических соображений параметрическими и функциональными воздействиями зачастую удобно моделировать внутренние причины, вызывающие изменение структуры системы. А к внешним воздействиям, таким образом, отнести лишь входные (аддитивные) воздействия.

Линейные системы с марковской структурой, изменения которой вызваны входными воздействиями, имеют ряд особенностей, упрощающих их анализ. Эти системы и рассматриваются в настоящей главе.

§ 5.2. Действие скачкообразного аддитивного белого шума на линейные системы

5.2.1. Непрерывная система. Рассмотрим линейную стохастическую систему, на вход которой поступают детерминированный сигнал $\mathbf{v}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ и гауссовский белый шум $\xi(t)$; модулированный марковским скачкообразным процессом $\mathbf{F}^{(s)}(t)$, где $s(t)$ — марковская цепь с n состояниями:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}^{(s)}(t)\xi(t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (5.4)$$

В этом частном случае уравнения для вероятностных моментов можно упростить без потери точности. Если нас не интересуют условные моменты $\mathbf{m}^{(s)}$ и $\Theta^{(s)}$, то, учитывая, что справедливы соотношения

$$\sum_{s=1}^n \mathbf{v}^{(sr)} = 0, \quad \Theta = \Phi - \mathbf{m}\mathbf{m}^T, \quad \Phi = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)}, \quad \mathbf{m} = \sum_{s=1}^n \bar{\mathbf{u}}^{(s)},$$

из уравнений (4.26), (4.31) получаем

$$\dot{\bar{p}}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r \neq s} \mathbf{v}^{(rs)} + \sum_{r \neq s} \mathbf{v}^{(sr)} p^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}),$$

$$\dot{m} = A m + B u, \quad (5.5)$$

$$\dot{\Theta} = A \Theta + \Theta A^T + \sum_{s=1}^n p^{(s)} F^{(s)} G F^{(s)T}.$$

Все переменные и коэффициенты в (5.5) в общем случае зависят от t , но аргумент t по-прежнему будем записывать при постановке задачи и опускать для простоты записи в алгоритмах, за исключением тех случаев, когда зависимость от времени необходимо подчеркнуть.

Пример 5.1. Центрированный белый шум $\xi(t)$ с интенсивностью G , модулированный случайным телеграфным сигналом $F^{(s)}(t)$ со значениями 1 и 0, проходит через фильтр низких частот — аperiодическое звено с постоянной времени T (рис. 5.3). Телеграфный сигнал генерируется непрерывной марковской цепью $s(t)$ с двумя состояниями — $v^{(21)}(t) = v$, $v^{(12)}(t) = \lambda$ ($v, \lambda = \text{const}$). Таким образом, средняя длительность импульса $T_1 = v^{-1}$, средняя длительность паузы $T_2 = \lambda^{-1}$. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию выходного сигнала $y(t)$.

Система описывается уравнением (5.4), которое в данном случае имеет вид

$$\dot{y} = T^{-1} [-y + F^{(s)}(t) \xi(t)]$$

$$(s = 1, 2),$$

$$p^{(1)}(0) = p_0^{(1)},$$

$$m(0) = 0, \quad \Theta(0) = \Theta_0,$$

$$F^{(1)} = 1, \quad F^{(2)} = 0.$$

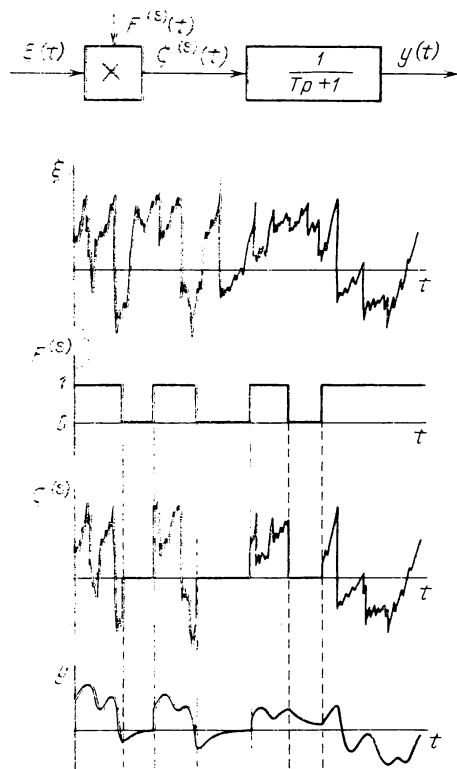


Рис. 5.3. Сглаживание скачкообразного белого шума аperiодическим звеном

На основании (5.5) математическое ожидание выходного сигнала равно нулю, а вероятности состояний структуры и дисперсия выходного сигнала определяются уравнениями

$$\dot{p}^{(1)} = -vp^{(1)} + \lambda p^{(2)}, \quad p^{(1)}(0) = p_0^{(1)}, \quad p^{(2)}(t) = 1 - p^{(1)}(t),$$

$$\dot{\Theta} = -2T^{-1}\Theta + p^{(1)}T^{-2}G, \quad \Theta(0) = \Theta_0.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$p^{(1)}(t) = \left(p_0^{(1)} - \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \right) e^{-(\nu + \lambda)t} + \frac{\lambda}{\nu + \lambda},$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} \left(\Theta_0 - \frac{\gamma}{2\alpha - \nu - \lambda} - \frac{\beta}{2\alpha} \right) e^{-2\alpha t} + \frac{\gamma}{2\alpha - \nu - \lambda} e^{-(\nu + \lambda)t} + \frac{\beta}{2\alpha}, & \nu + \lambda \neq 2\alpha, \\ \left(\Theta_0 - \frac{\beta}{2\alpha} + \gamma t \right) e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha}, & \nu + \lambda = 2\alpha, \end{cases}$$

где

$$\alpha \triangleq \frac{1}{T}; \quad \beta \triangleq \frac{\lambda G}{(\nu + \lambda) T^2}; \quad \gamma \triangleq \left(p_0^{(1)} - \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \right) \frac{G}{T^2}.$$

В установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$)

$$p^{(1)} = \frac{\lambda}{\nu + \lambda}, \quad p^{(2)} = \frac{\nu}{\nu + \lambda}, \quad \Theta = \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \frac{G}{2T}.$$

Сравнение полученных результатов с известным результатом прохождения белого шума через апериодическое звено ($\Theta = G/2T$) показывает, что модуляция аддитивного централизованного белого шума марковским телеграфным сигналом приводит к уменьшению установившейся дисперсии выходного сигнала в $T_1/(T_1 + T_2)$ раз.

5.2.2. Дискретная система. Аналогичная дискретная линейная система с марковской структурой описывается рекуррентным уравнением (5.1), в котором $\mathbf{g}(\cdot) \equiv 0$ (отсутствуют мультипликативные возмущения), а матрицы $\mathbf{A}(\cdot)$ и $\mathbf{B}(\cdot)$ не зависят от изменений структуры $s(k)$:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k) \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}(k+1, k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}[s(k+1), s(k), k+1, k] \xi(k) \quad (5.6)$$

при

$$q[s(k+1), k+1 | s(k), \mathbf{y}(k), k] = q[s(k+1), k+1 | s(k), k] \triangleq \triangleq q^{(sr)}(k+1, k).$$

Если не требуется находить условные моменты $\mathbf{m}^{(s)}(k)$, $\Theta^{(s)}(k)$, то в рассматриваемом частном случае уравнения для вероятностей структуры и безусловных моментов существенно упрощаются по сравнению с общим случаем. Учитывая соотношения

$$\sum_{s=1}^n p^{(sr)} = 1, \quad \mathbf{m} = \sum_{s=1}^n \mathbf{m}^{(s)}, \quad \Phi = \sum_{s=1}^n \Psi^{(s)},$$

из уравнений (4.50) — (4.52) получаем

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n q^{(sr)} p^{(r)}(k) \quad (s = \overline{1, n}),$$

$$\mathbf{m}^-(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{m}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k), \quad (5.7)$$

$$\Theta(k+1) = \mathbf{A} \Theta(k) \mathbf{A}^T + \sum_{s,r=1}^n q^{(sr)} p^{(r)}(k) \mathbf{F}^{(sr)} \mathbf{G} \mathbf{F}^{(sr)T},$$

где

$$F^{(sr)} \triangleq F[s(k+1), s(k), k+1, k]; \quad s \triangleq s(k+1); \quad r \triangleq s(k).$$

Таким образом, рассмотрена задача прохождения скачкообразного белого шума через инерционный фильтр первого порядка. Как в непрерывном, так и в дискретном варианте система уравнений для вероятностей и моментов (5.5) или (5.7) содержит на $2(n-1)$ уравнений меньше, чем в общем случае, поскольку для определения безусловных моментов m и Θ не нужно находить условные моменты $m^{(s)}$, $\Theta^{(s)}$.

Следует также отметить, что уравнения для математического ожидания m не отличаются от уравнений системы с детерминированной структурой. Скачкообразный модулирующий сигнал $s(t)$, вызывающий изменение интенсивности возмущения $\xi^{(s)}(t) = F^{(s)}(t)\xi(t)$, в данном случае, как и следовало ожидать, влияет лишь на матрицу корреляционных моментов Θ .

Пример 5.2. На вход стационарного сглаживающего дискретного фильтра первого порядка поступает по линии связи последовательность независимых случайных импульсов $\xi(k)$ с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией G^* . В результате помех в линии связи возможны перерывы, которые описываются однородной дискретной марковской цепью $s(k)$ с двумя состояниями: 1 и 2. Вероятности переходов цепи:

$$q^{(21)} = q_1, \quad q^{(12)} = q_2, \quad q^{(11)} = 1 - q_1, \quad q^{(22)} = 1 - q_2.$$

Математическая модель этой системы может быть представлена в виде

$$y(k+1) = ay(k) + cF^{(sr)}\xi(k),$$

где

$$F^{(11)} = 1; \quad F^{(21)} = F^{(12)} = \sqrt{0,5}; \quad F^{(22)} = 0;$$

$$a, c = \text{const}; \quad 0 < a < 1; \quad c > 0.$$

Требуется найти математическое ожидание $m(k)$ и дисперсию $\Theta(k)$ выходного сигнала $y(k)$.

В силу условий задачи и на основании уравнений (5.7) $m(k) = 0$, а вероятности состояний структуры и дисперсия $\Theta(k)$ определяются уравнениями

$$p^{(1)}(k+1) = (1 - q_1)p^{(1)}(k) + q_2p^{(2)}(k), \quad p^{(1)}(0) = p_0^{(1)},$$

$$p^{(2)}(k) = 1 - p^{(1)}(k),$$

$$\Theta(k+1) = a^2\Theta(k) + c^2[(1 - q_1)p^{(1)}(k) + 0,5q_2p^{(2)}(k) + 0,5q_1p^{(1)}(k)]G^*, \quad \Theta(0) = \Theta_0.$$

Исключая из этого уравнения $p^{(2)}(k)$, получаем

$$p^{(1)}(k+1) = (1 - q_1 - q_2)p^{(1)}(k) + q_2, \quad p^{(1)}(0) = p_0,$$

$$\Theta(k+1) = a^2\Theta(k) + c^2[(1 - 0,5q_1 - 0,5q_2)p^{(1)}(k) + 0,5q_2]G^*,$$

$$\Theta(0) = \Theta_0.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$p^{(1)}(k) = \left(p_0^{(1)} - \frac{q_2}{q_1 + q_2} \right) (1 - q_1 - q_2)^k + \frac{q_2}{q_1 + q_2},$$

$$\Theta(k) = \begin{cases} \left(\Theta_0 - \frac{l}{1-a^2} - \frac{q}{d-a^2} \right) a^{2k} + \frac{l}{1-a^2} + \frac{qd^k}{d-a^2}, & d \neq a^2, \\ \left(\Theta_0 - \frac{l}{1-a^2} + \frac{qk}{a^2} \right) a^{2k} + \frac{l}{1-a^2}, & d = a^2, \end{cases}$$

где

$$l \triangleq \frac{q_2 G^* C^2}{q_1 + q_2}; \quad d \triangleq (1 - q_1 - q_2);$$

$$q \triangleq c^2 (1 - 0,5q_1 - 0,5q_2) \left(p_0^{(1)} - \frac{q_2}{q_1 + q_2} \right) G^*.$$

В установившемся режиме (при $k \rightarrow \infty$) получаем

$$p^{(1)}(\infty) = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad p^{(2)}(\infty) = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad \Theta(\infty) = \frac{l}{1-a^2}.$$

Нетрудно заметить, что рассмотренная математическая модель системы — дискретный аналог непрерывной модели из примера 5.1. При решении практических задач зачастую возникает необходимость преобразований непрерывной модели в дискретную (например, при цифровом моделировании) и наоборот (например, при аналитическом решении). Поэтому интересно выяснить соответствие моделей и решений в рассмотренных примерах.

Сравнивая обе задачи, убеждаемся, что математическая модель в примере 5.2 может служить дискретным эквивалентом непрерывной математической модели примера 5.1 при условиях

$$a = e^{-\alpha \Delta t}, \quad c = 1 - e^{-\alpha \Delta t}, \quad G^* = \frac{G}{\Delta t},$$

$$q_1 = \frac{\nu}{\nu + \lambda} (1 - e^{-(\nu + \lambda) \Delta t}), \quad q_2 = \frac{\lambda}{\nu + \lambda} (1 - e^{-(\nu + \lambda) \Delta t}),$$

где Δt — интервал дискретности.

Подставляя полученные выражения в уравнения модели и уравнения для вероятностей и моментов, убеждаемся, что эти уравнения при $\Delta t \rightarrow 0$ переходят в соответствующие уравнения для аналогичной непрерывной системы, рассмотренной в п. 5.2.1.

§ 5.3. Действие на линейные системы аддитивных марковских скачкообразных сигналов

5.3.1. Непрерывная система. Рассмотрим линейную стохастическую систему, на вход которой поступают гауссовский белый шум $\xi(t)$ и детерминированный сигнал $u(t)$, модулированные марковскими скачкообразными процессами соответственно $F^{(s)}(t)$ и

$\mathbf{V}^{(s)}(t)$, где $s(t)$ — марковская цепь с n состояниями:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}^{(s)}(t)\xi(t) \quad (s = \overline{1, n}). \quad (5.8)$$

В этом случае также, если не интересоваться вторыми условными моментами, можно без потери точности упростить уравнения для вероятностей структуры и моментов. Из уравнений (4.26), (4.32) получаем

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)}, \\ \dot{\mu}^{(s)} &= \mathbf{A}\mu^{(s)} - p^{(s)}\mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u} - \mu^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} \mu^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \\ \dot{\Phi} &= \mathbf{A}\Phi + \Phi\mathbf{A}^T + \sum_{s=1}^n p^{(s)}\mathbf{F}^{(s)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(s)T} - \sum_{s=1}^n \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}\mu^{(s)T} + \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^{(s)T}, \\ \mathbf{m} &= \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}, \quad \Theta = \Phi - \mathbf{m}\mathbf{m}^T, \quad \mathbf{m}^{(s)} = \mu^{(s)}/p^{(s)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Если же исследователя интересуют только $p^{(s)}$ и $\mathbf{m}$, то они могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(s)} &= -p^{(s)} \sum_{r \neq s} v^{(rs)} + \sum_{r \neq s} v^{(sr)} p^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}), \\ \dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{A}\mathbf{m} + \sum_{s=1}^n p^{(s)}\mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.3.2. Дискретная система. Аналогичная дискретная линейная система с марковской структурой описывается уравнением

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}^{(sr)}(k+1, k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}^{(sr)}(k+1, k)\xi(k). \quad (5.11)$$

Учитывая, что $\sum_{s=1}^n q^{(sr)} = 1$, из системы уравнений (4.52) получаем в данном случае (опуская аргумент k у коэффициентов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$)

$$\begin{aligned} p^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)} p^{(r)}(k), \\ \mu^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)} [\mathbf{A}\mu^{(r)}(k) + p^{(r)}(k)\mathbf{B}^{(sr)}\mathbf{u}(k)] \quad (s = \overline{1, n}), \\ \Phi(k+1) &= \mathbf{A}\Phi\mathbf{A}^T + \sum_{s, r=1}^n q^{(sr)} \{ \mathbf{A}\mu^{(r)}(k)\mathbf{u}^T(k)\mathbf{B}^{(sr)T} + \\ &\quad + \mathbf{B}^{(sr)}\mathbf{u}(k)\mu^{(r)T}(k)\mathbf{A}^T - p^{(r)}(k) [\mathbf{B}^{(sr)}\mathbf{u}(k)\mathbf{u}^T(k)\mathbf{B}^{(sr)T} + \\ &\quad + \mathbf{F}^{(sr)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(sr)T}] \}, \\ \mathbf{m}(k) &= \sum_{s=1}^n \mu^{(s)}(k), \quad \Theta(k) = \Phi(k) - \mathbf{m}(k)\mathbf{m}^T(k). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Так же как и для непрерывной системы, в том случае, когда нас интересуют лишь $p^{(s)}$ и m , они определяются еще более простыми уравнениями

$$\begin{aligned} p^{(s)}(k+1) &= \sum_{r=1}^n q^{(sr)} p^{(r)}(k) \quad (s = \overline{1, n}), \\ m(k+1) &= Am(k) + \sum_{s,r=1}^n q^{(sr)} p^{(r)} B^{(sr)} u(k). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Таким образом, система уравнений для определения безусловных моментов m и Θ в непрерывном и дискретном вариантах содержит на $n-1$ уравнений меньше, чем в общем случае, поскольку нет необходимости при этом определять вторые условные моменты $\Theta^{(s)}$ (или $\Psi^{(s)}$). В отличие от задачи, рассмотренной в § 5.2, уравнения для m отличаются от соответствующих уравнений для системы с детерминированной структурой.

На изменение корреляционных моментов фазовых координат влияет скачкообразная модуляция детерминированного сигнала и белого шума, а на математическое ожидание фазовых координат оказывает влияние лишь скачкообразная модуляция детерминированного сигнала.

Пример 5.3. Пеленгатор цели, установленный на самонаводящейся ракете, предназначен для измерения угловых координат самолета (рис. 5.4). Самолет ставит ракете помехи с помощью

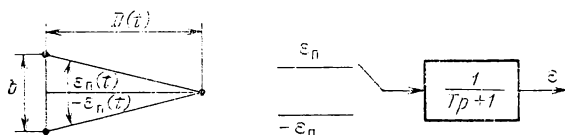


Рис. 5.4. Схема пеленгатора

двух передатчиков, расположенных на концах крыльев, расстояние между которыми равно b [14]. Передатчики работают попеременно. Их переключения образуют пуассоновский поток событий со средней частотой 2ν . Пеленгатор при этом в каждый момент времени t может измерять только направление на включенный передатчик (угол $\pm \varepsilon_n$). Однако эти измерения осуществляются с динамической ошибкой вследствие инерционности пеленгатора, описываемого апериодическим звеном с постоянной времени T . Угол поля зрения пеленгатора φ равен π радиан. Дальность ракеты до самолета равна $D(t)$, их сближение происходит с постоянной скоростью v . Требуется найти математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $\Theta(t)$ измеренного пеленгатором угла $\varepsilon(t)$ направления на передатчик помех.

Математическая модель задачи может быть записана в виде

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{T} (-\varepsilon + \varepsilon_n^{(s)}) \quad (s = 1, 2).$$

где $s(t)$ — непрерывная марковская цепь с двумя состояниями: $s=1$ — пеленгация первого передатчика помех, $s=2$ — пеленгация второго передатчика помех; $\varepsilon_{\Pi}^{(1)}(t) = \varepsilon_{\Pi}(t)$, $\varepsilon_{\Pi}^{(2)}(t) = -\varepsilon_{\Pi}(t)$, $\varepsilon_{\Pi}(t) = b/2D(t)$.

Согласно (5.9), $m(t)$ и $\Theta(t)$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -2\nu p^{(1)} + \nu, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\ \dot{\mu}^{(1)} &= \frac{1}{T} \left(-\mu^{(1)} + p^{(1)} \frac{b}{2\nu(t_{\Pi} - t)} \right) - \nu(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}), \\ \dot{\mu}^{(2)} &= \frac{1}{T} \left(-\mu^{(2)} - p^{(2)} \frac{b}{2\nu(t_{\Pi} - t)} \right) + \nu(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}), \\ \dot{\Phi} &= \frac{2}{T} \left[-\Phi + \frac{b}{2\nu(t_{\Pi} - t)} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \right], \\ p^{(1)}(0) &= p_0, \quad \mu^{(1)}(0) = p_0 m_0^{(1)}, \quad \mu^{(2)}(0) = (1 - p_0) m_0^{(2)}, \\ \Phi(0) &\triangleq \Phi_0 = \sigma_0^2 + [p_0 m_0^{(1)} + (1 - p_0) m_0^{(2)}]^2,\end{aligned}$$

где начальные условия p_0 , $m_0^{(1)}$, $m_0^{(2)}$, σ_0 и параметры b , D_0 , ν , ν , T заданы; $t_{\Pi} = D_0/\nu$ — конечный момент времени наведения ракеты, определяемый из условия $D(t_{\Pi}) = 0$.

Обозначив $\vartheta \triangleq \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$, $\alpha \triangleq T^{-1}$, $\beta \triangleq b/2T\nu$, упростим уравнения для моментов:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -2\nu p^{(1)} + \nu, \\ \dot{m} &= -\alpha m + (2p^{(1)} - 1)\beta/(t_{\Pi} - t), \\ \dot{\vartheta} &= -(\alpha + 2\nu)\vartheta + \beta/(t_{\Pi} - t), \\ \dot{\Phi} &= -2\alpha\Phi + 2\beta\vartheta/(t_{\Pi} - t), \\ \Theta &= \Phi - m^2, \quad m(0) \triangleq m_0 = \mu^{(1)}(0) + \mu^{(2)}(0).\end{aligned}$$

Решение этих уравнений (при $\alpha \neq 2\nu$) имеет вид

$$\begin{aligned}p^{(1)} &= (p_0 - 0,5)e^{-2\nu t} + 0,5, \quad p^{(2)}(t) = 1 - p^{(1)}(t), \\ m(t) &= m_0 e^{-\alpha t} + (2p_0 - 1)\beta e^{\alpha\tau} e^{-2\nu t_{\Pi}} [E_i(-\gamma t_{\Pi}) - E_i(-\gamma\tau)], \\ \Theta(t) &\approx \Theta_0 e^{-2\alpha t} + 2\beta e^{2\alpha\tau} \int_{\tau}^{t_{\Pi}} \frac{e^{-\gamma u}}{u} [E_i(-\lambda t_{\Pi}) - E_i(-\lambda u)] du,\end{aligned}$$

где

$$\gamma \triangleq \alpha - 2\nu; \quad \lambda \triangleq \alpha + 2\nu; \quad \tau \triangleq t_{\Pi} - t;$$

$E_i(x)$ — интегральная показательная функция.

Анализ полученных формул показывает, что при $t \rightarrow t_{\Pi}$ и $m(t) \rightarrow \infty$ (если $p_0 > 0,5$) или $m(t) \rightarrow -\infty$ (если $p_0 < 0$) имеет место $\Theta(t) \rightarrow \infty$. Это отражает наличие расходящихся случайных колебаний выходного сигнала пеленгатора (рис. 5.5).

На практике этого не происходит, потому что угол поля зрения пеленгатора ограничен ($\varphi \ll \pi$) и на некоторой дальности D_1 один из передатчиков выходит из поля зрения, после чего

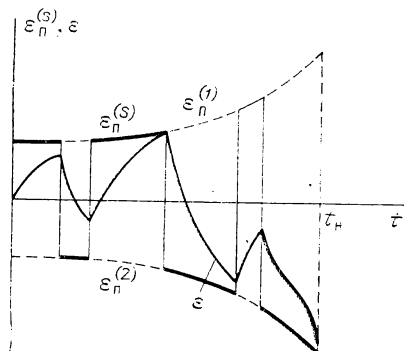


Рис. 5.5. Входной скачкообразный и выходной сглаженный сигналы пеленгатора

случайные колебания выходного сигнала пеленгатора прекращаются.

5.3.3. «Симметричный» скачкообразный входной сигнал. В ряде практических задач приходится иметь дело с так называемыми «симметричными» входными скачкообразными сигналами. Под этим понимаются некоторые следующие дополнительные условия. Для непрерывных систем:

$$v^{(sr)}(t) = v^{(s'r')}(t), \quad B^{(s)}(t) = -B^{(s')}(t) \quad (s, r = \overline{1, n}),$$

$$v^{(ss)}(t) \triangleq - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(t); \quad (5.14)$$

для дискретных систем:

$$q^{(sr)}(t) = q^{(s'r')}(t), \quad B^{(sr)}(t) = -B^{(s'r')}(t),$$

$$s' \triangleq n+1-s, \quad r' \triangleq n+1-r. \quad (5.15)$$

Физический смысл этих условий состоит в том, что каждому состоянию одной половины множества состояний структуры соответствует свой «антипод» из другой половины. Вероятности переходов «антиподов» равны между собой, а коэффициенты усиления входного сигнала равны с обратным знаком.

Эти свойства позволяют уменьшить число уравнений для вероятностных характеристик. Обозначая $\dot{p}^{(s)} \triangleq \dot{p}^{(s)} - \dot{p}^{(s')}$ и используя условия (5.14), для непрерывной системы получаем из (5.9) уравнения, которые можно записать в виде

$$\dot{p}^{(s)} = \sum_{k=1}^n v^{(sk)} p^{(k)} \quad (s = \overline{1, n}),$$

$$\dot{m} = A m + \sum_{s=1}^l (p^{(s)} - p^{(s')}) B^{(s)} u, \quad (5.16)$$

$$\dot{\vartheta}^{(s)} = \mathbf{A}\vartheta^{(s)} + (p^{(s)} + p^{(s')})\mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u} + \sum_{r=1}^l (v^{(sr)} - v^{(s'r)})\vartheta^{(r)},$$

$$\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi + \Phi\mathbf{A}^T + \sum_{s=1}^n p^{(s)}\mathbf{F}^{(s)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(s)T} + \sum_{s=1}^l \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}\vartheta^{(s)T} + \sum_{s=1}^l \vartheta^{(s)}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^{(s)T},$$

где

$$s = \overline{1, l}, \quad l = \begin{cases} n/2 - \text{для четных } n, \\ (n-1)/2 - \text{для нечетных } n; \end{cases}$$

$$s' \triangleq n+1-s; \quad v^{(ss)} \triangleq - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}.$$

Аналогичные уравнения для дискретной системы получаем из (5.12) с учетом условий (5.15):

$$p^{(s)}(k+1) = \sum_{r=1}^n q^{(sr)}p^{(r)}(k) \quad (s = \overline{1, n}),$$

$$\mathbf{m}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{m}(k) + \sum_{s,r=1}^l (p^{(r)} - p^{(r')}) (q^{(sr)}\mathbf{B}^{(sr)} + q^{(s'r)}\mathbf{B}^{(s'r)}),$$

$$\begin{aligned} \vartheta^{(s)}(k+1) = & \sum_{r=1}^l [(q^{(sr)} - q^{(s'r)})\mathbf{A}\vartheta^{(r)} + \\ & + (p^{(r)} + p^{(r')})(q^{(sr)}\mathbf{B}^{(sr)} + q^{(s'r)}\mathbf{B}^{(s'r)})], \end{aligned} \quad (5.17)_s$$

$$\begin{aligned} \Phi(k+1) = & \mathbf{A}\Phi(k)\mathbf{A}^T + \\ & + \sum_{r=1}^l [\mathbf{A}\vartheta^{(r)}\mathbf{u}^T (q^{(sr)}\mathbf{B}^{(sr)} + q^{(s'r)}\mathbf{B}^{(s'r)})^T + \\ & + (q^{(sr)}\mathbf{B}^{(sr)} + q^{(s'r)}\mathbf{B}^{(s'r)})\mathbf{u}\vartheta^{(r)T}\mathbf{A}^T + \\ & + (p^{(r)} + p^{(r')})(q^{(sr)}\mathbf{B}^{(sr)}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^{(sr)T} + q^{(s'r)}\mathbf{B}^{(s'r)}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^{(s'r)T})] + \\ & + \sum_{r=1}^n q^{(sr)}\mathbf{F}^{(sr)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(sr)T} \quad (s = \overline{1, l}). \end{aligned}$$

$$l = \begin{cases} n/2 - \text{для четных } n, \\ (n-1)/2 - \text{для нечетных } n, \end{cases}$$

где

$$s' \triangleq n+1-s; \quad r' \triangleq n+1-r.$$

Сравнение уравнений (5.16) с (5.9) и (5.17) с (5.12) показывает, что для нахождения безусловных моментов при действии «симметричного» сигнала требуется на $n/2$ меньше уравнений, чем в общем случае.

Особенно выгодно использовать уравнения (5.16) и (5.17), когда эти алгоритмы реализуются на управляющих ЭВМ с невысоким быстродействием, и чем больше число состояний структуры n , тем ощутимее экономия времени счета.

Пример 5.4. На вход инерционного фильтра, описываемого апериодическим звеном с постоянной времени T , поступает аддитивная смесь скалярного детерминированного сигнала $u(t)$ и скалярного белого шума $\xi(t)$, модулированных марковскими скачкообразными процессами $B^{(s)}(t)$ и $F^{(s)}(t)$ соответственно. Эти процессы генерируются непрерывной марковской цепью $s(t)$ с тремя состояниями.

Скачкообразный входной сигнал $B^{(s)}(t)u(t)$ обладает свойством симметрии, которое выражается в выполнении условий

$$B^{(1)}(t) = -B^{(3)}(t), \quad B^{(2)}(t) = 0,$$

$$\nu^{(21)}(t) = \nu^{(23)}(t), \quad \nu^{(31)}(t) = \nu^{(13)}(t), \quad \nu^{(12)}(t) = \nu^{(32)}(t).$$

Составим уравнения для вероятностных моментов выходного сигнала. Согласно (5.16) имеем

$$\dot{p}^{(s)} = \sum_{r=1}^3 \nu^{(sr)} p^{(r)} \quad (s = 1, 3), \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)} - p^{(3)},$$

$$\dot{m} = T^{-1} [-m + (p^{(1)} - p^{(3)}) B^{(1)} u],$$

$$\dot{\Phi} = T^{-1} [-\Phi + (p^{(1)} + p^{(3)}) B^{(1)} u],$$

$$\dot{\Phi} = T^{-1} \left[-2\Phi + 2B^{(1)} u \Phi + \sum_{s=1}^3 p^{(s)} (F^{(s)})^2 G \right],$$

$$\Theta = \Phi - m^2, \quad \nu^{(11)} \triangleq -(\nu^{(21)} + \nu^{(31)}), \quad \nu^{(33)} \triangleq -(\nu^{(13)} + \nu^{(23)}).$$

В том случае, когда система стационарна, можно найти установившиеся значения:

$$p^{(1)} = p^{(3)} = \frac{\lambda}{2\nu + \lambda}, \quad p^{(2)} = \frac{2\nu - \lambda}{2\nu + \lambda},$$

$$m = 0, \quad \Phi = \frac{2\lambda B u}{2\nu + \lambda},$$

$$\Theta = \frac{1}{2(2\nu + \lambda)} \{ 4\lambda B^2 u^2 + [\lambda (F_1^2 + F_2^2) + (2\nu - \lambda) F_2^2] G \},$$

где

$$B^{(1)}(t) = B; \quad F^{(s)}(t) = F_s \quad (s = 1, 2);$$

$$u(t) = u; \quad \nu^{(21)}(t) = \nu; \quad \nu^{(12)}(t) = \lambda.$$

§ 5.4. Сглаживание случайного двоичного сигнала апериодическим звеном

5.4.1. Закон распределения выходного сигнала. Рассмотрим частный случай непрерывной линейной системы с марковской структурой, изменения которой соответствуют скачкам входного случайного двоичного сигнала. Система описывается уравнением

$$\dot{y} = a(-y + u^{(s)}), \quad a > 0, \quad (5.18)$$

где $s(t)$ — марковская цепь с двумя состояниями $s = 1$ и $s = 2$,

заданная интенсивностями переходов $v^{(21)}(t) = v$, $v^{(12)}(t) = \lambda$, $u^{(s)}(t)$ — случайный двоичный сигнал со значениями $u^{(1)} = u_1$, $u^{(2)} = -u_2$ (рис. 5.6).

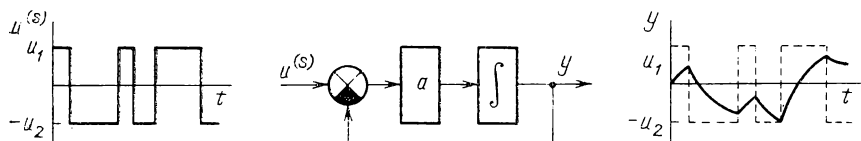


Рис. 5.6. Преобразование случайного двоичного сигнала аperiодическим звеном

Найдем закон распределения выходного сигнала $y(t)$ в установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$). В предположении, что стационарное (установившееся) распределение существует, для совместной плотности вероятности выходного сигнала y и индекса структуры s имеем на основании обобщенного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (3.72) при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a(y - u_1) \frac{\partial f(y, 1)}{\partial y} + (a - v)f(y, 1) + \lambda f(y, 2) &= 0, \\ a(y + u_2) \frac{\partial f(y, 2)}{\partial y} + (a - \lambda)f(y, 2) + vf(y, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Исключая из системы уравнений (5.19) переменную $f(y, 2)$ и используя подстановку $x = (y + u_2)/(u_1 + u_2)$, получаем гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$\begin{aligned} x(x - 1) \frac{\partial^2 f(x, 1)}{\partial x^2} + [(3 - \alpha - \beta)x + \alpha - 1] \frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} + \\ + (1 - \alpha - \beta)f(x, 1) = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\alpha \triangleq \lambda/a$; $\beta \triangleq v/a$.

Можно показать [33], что уравнение (5.20) эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными

$$x(x - 1) \frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} + [(1 - \alpha - \beta)x + \alpha]f(x, 1) = 0. \quad (5.21)$$

Аналогично получаем уравнение для $f(x, 2)$

$$x(x - 1) \frac{\partial f(x, 2)}{\partial x} + [(1 - \alpha - \beta)x + \alpha - 1]f(x, 2) = 0. \quad (5.22)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$f(x, 1) = C_1 x^\alpha (1 - x)^{\beta-1}, \quad f(x, 2) = C_2 x^{\alpha-1} (1 - x)^\beta. \quad (5.23)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 определяются из условий нормировки

$$\int_0^1 f(x, 1) dx = p^{(1)}, \quad \int_0^1 f(x, 2) dx = p^{(2)}, \quad (5.24)$$

где $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ — установившиеся вероятности состояний структуры.

Эти вероятности определяются из уравнений Колмогорова

$$\dot{p}^{(1)} = -\nu p^{(1)} + \lambda p^{(2)}, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}$$

при $t \rightarrow \infty$, что эквивалентно в данном случае $\dot{p}^{(1)}(\infty) = 0$. Отсюда следует

$$p^{(1)} = \frac{\lambda}{\nu + \lambda}, \quad p^{(2)} = \frac{\nu}{\nu + \lambda}. \quad (5.25)$$

Подставив (5.25) в (5.23) и (5.24), произведя обратную замену переменных $y = (u_1 + u_2)x - u_2$ и учитывая соотношения $f(y, 1) = p^{(1)}f^{(1)}(y)$, $f(y, 2) = p^{(2)}f^{(2)}(y)$, найдем установившиеся условные плотности вероятностей

$$\begin{aligned} f^{(1)}(y) &= \frac{(u_2 + y)^\alpha (u_1 - y)^{\beta-1}}{(u_1 + u_2)^{\alpha+\beta} B(\alpha + 1, \beta)}, \\ f^{(2)}(y) &= \frac{(u_2 + y)^{\alpha-1} (u_1 - y)^\beta}{(u_1 + u_2)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta + 1)}, \quad y \in [-u_2, u_1], \\ f^{(1)}(y) &= f^{(2)}(y) = 0, \quad y \notin [-u_2, u_1], \quad \alpha, \beta > 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, связанная с гамма-функцией формулой

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Безусловная плотность вероятности на основании равенства $f(y) = f(y, 1) + f(y, 2)$ определяется формулой

$$f(y) = \begin{cases} \frac{(u_2 + y)^{\alpha-1} (u_1 - y)^{\beta-1}}{(u_1 + u_2)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)}, & y \in [-u_2, u_1], \\ 0, & y \notin [-u_2, u_1]. \end{cases} \quad (5.27)$$

Таким образом, условные и безусловное распределения выходного сигнала в установившемся режиме являются распределениями Пирсона I типа. В частном случае при $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ распределения (5.26), (5.27) являются бета-распределениями:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(y) &= \frac{y^\alpha (1 - y)^{\beta-1}}{B(\alpha + 1, \beta)}, \quad f^{(2)}(y) = \frac{y^{\alpha-1} (1 - y)^\beta}{B(\alpha, \beta + 1)}, \\ f(y) &= \frac{y^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad y \in [0, 1], \\ f^{(1)}(y) &= f^{(2)}(y) = f(y) = 0, \quad y \notin [0, 1], \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

В частном случае при $u_1 = u_2 = 1$ имеем распределение Пирсона II типа:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(y) &= \frac{(1 - y)^\alpha (1 - y)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta} B(\alpha + 1, \beta)}, \quad f^{(2)}(y) = \frac{(1 + y)^{\alpha-1} (1 - y)^\beta}{2^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta + 1)}, \\ f(y) &= \frac{(1 + y)^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)}, \quad y \in [-1, 1], \\ f^{(1)}(y) &= f^{(2)}(y) = f(y) = 0, \quad y \notin [-1, 1]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Полученные результаты позволяют сделать некоторые важные с практической точки зрения выводы. Во-первых, даже в случае линейной системы с марковской структурой и при гауссовских начальных распределениях условные и безусловные распределения фазовых координат в установившемся режиме будут

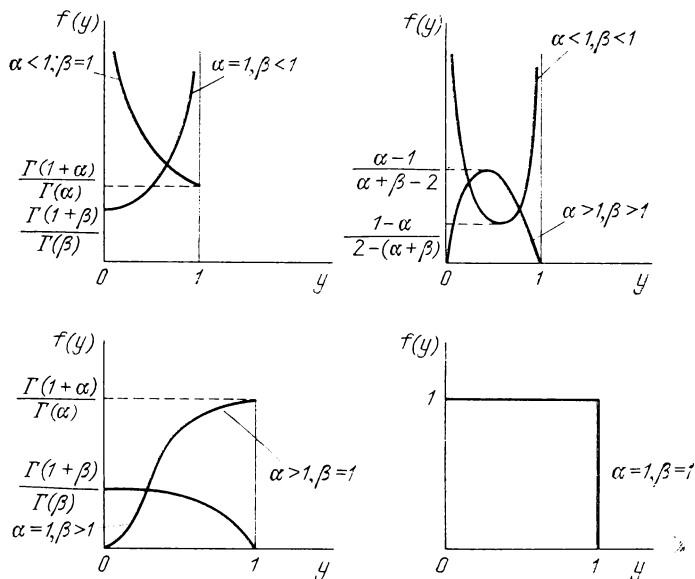


Рис. 5.7. Распределение сглаженного случайного двоичного сигнала по закону Пирсона I типа

негауссовскими. При определенных значениях параметров эти распределения могут существенно отличаться от нормального закона (рис. 5.7).

Во-вторых, распределение Пирсона I типа удобно для двухмоментной параметрической аппроксимации плотностей в системах со случайными скачкообразными входными сигналами. Форма кривой распределения Пирсона I типа может изменяться в широких пределах, что и обусловило широкое применение этого закона в задачах математической статистики при сглаживании эмпирических данных. Как видно из рис. 5.7, вид кривых значительно изменяется в зависимости от параметров $\alpha \triangleq \lambda/a$ и $\beta \triangleq \nu/a$, характеризующих отношение спектра входного сигнала к полосе пропускания аperiodического звена и сдвиг распределения в сторону одной из границ u_1 или $-u_2$.

И, наконец, немаловажно то, что вероятностные моменты распределения Пирсона I типа связаны с его параметрами α, β простыми алгебраическими формулами, что упрощает применение этого закона в практических задачах (эти формулы приведены в п. 5.4.2).

Пример 5.5. Рассмотрим следующую задачу. Известно, что непрерывный стационарный случайный процесс имеет математическое ожидание $m(t) \equiv 0$, корреляционную функцию

$$K_y(\tau) = \frac{a\varepsilon}{a^2 - \gamma^2} (ae^{-\gamma|\tau|} - \gamma e^{-a|\tau|}),$$

где $\gamma \triangleq \nu + \lambda$, $\varepsilon \triangleq 4\nu\lambda/\gamma^2$, и плотность распределения в каждый момент времени

$$f(y) = \begin{cases} \frac{(1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)}, & y \in [-1, 1], \\ 0, & y \notin [-1, 1], \end{cases}$$

где $\alpha \triangleq \lambda/a$, $\beta \triangleq \nu/a$, $\nu, \lambda, a > 0$.

Требуется построить формирующий фильтр, на вход которого поступает случайный двичный сигнал в виде непрерывной марковской цепи.

Для решения поставленной задачи найдем спектральную плотность выходного сигнала как преобразование Фурье от корреляционной функции:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{a\varepsilon}{a^2 - \gamma^2} \left(\frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau - \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{a^2\gamma\varepsilon}{(a^2 - \gamma^2)\pi} \left(\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} - \frac{1}{a^2 + \omega^2} \right) = \frac{\gamma\varepsilon}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)} \frac{a^2}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Как известно,

$$S_y(\omega) = S_{\xi}(\omega) |\Phi(i\omega)|^2,$$

где $S_{\xi}(\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала; $\Phi(i\omega)$ — амплитудно-фазовая частотная характеристика формирующего фильтра. Отсюда следует, что

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\gamma\varepsilon}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad \Phi(i\omega) = \frac{a}{a + i\omega}.$$

Таким образом, формирующий фильтр представляет собой аperiodическое звено с коэффициентом усиления, равным единице.

Спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$ соответствует корреляционная функция

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \varepsilon e^{-\gamma|\tau|} = \frac{4\nu\lambda}{(\nu + \lambda)^2} e^{-(\nu + \lambda)|\tau|}.$$

Спектральную плотность и корреляционную функцию такого вида могут иметь как диффузионный марковский процесс, так и

непрерывная марковская цепь. Однако если в первом случае плотность вероятности выходного сигнала отлична от нуля в области $(-\infty, \infty)$, то во втором случае она равна нулю вне пределов некоторой ограниченной области.

Как следует из результатов п. 5.4.1, входной сигнал, генерирующий на выходе аperiodического звена выходной сигнал с заданной плотностью $f(y)$, представляет собой случайный двоичный сигнал — непрерывную марковскую цепь с двумя состояниями $\xi = 1$ и $\xi = -1$ и интенсивностями переходов ν и λ . Как показано в [64], этот процесс имеет корреляционную функцию $K_\xi(\tau)$, приведенную выше.

При моделировании на ЦВМ при малом шаге Δt , удовлетворяющем условиям $\nu\Delta t, \lambda\Delta t \ll 1$, генератор сигнала $\xi(i)$ может быть

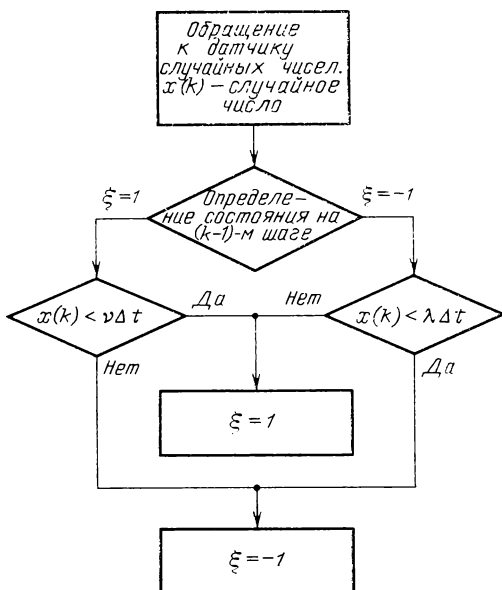


Рис. 5.8. Алгоритм генератора случайного двоичного сигнала

построен по следующему алгоритму (рис. (5.8). На каждом шаге k следует обращение к датчику случайных чисел, распределенных равномерно в диапазоне $[0, 1]$. Значение датчика — случайное число $x(k)$ — сравнивается с величиной $\nu\Delta t$, если $\xi(k-1) = 1$ (или с величиной $\lambda\Delta t$, если $\xi(k-1) = -1$). Если в результате сравнения окажется, что $x(k) < \nu\Delta t$, то $\xi(k)$ присваивается значение 1. В противном случае $\xi(k) = -1$. Аналогично $\xi(k) = -1$ при $x(k) < \lambda\Delta t$, $\xi(k) = 1$ при $x(k) \geq \lambda\Delta t$.

В качестве датчиков случайных чисел используются либо физические датчики, либо программные генераторы псевдослучайных числовых последовательностей. Последние получили более широкое распространение при использовании современных ЦВМ.

Достоинства и недостатки датчиков случайных чисел рассматриваются в [60].

5.4.2. Вероятности состояний структуры и моменты выходного сигнала. Для установившегося режима системы, описываемой уравнением (5.18), моменты выходного сигнала определяются по формулам

$$m^{(s)} = \int_{-u_2}^{u_1} y f^{(s)}(y) dy, \quad m = \int_{-u_2}^{u_1} y f(y) dy,$$

$$\Theta^{(s)} = \int_{-u_2}^{u_1} (y - m^{(s)})^2 f^{(s)}(y) dy, \quad \Theta = \int_{-u_2}^{u_1} (y - m)^2 f(y) dy \quad (s = 1, 2),$$

$$(s = 1, 2),$$
(5.30)

где $f^{(s)}(y)$, $f(y)$ определены выражениями (5.25) — (5.27).

В результате вычислений получаем

$$m^{(1)} = \frac{u_1(\alpha + 1) - u_2\beta}{\alpha + \beta + 1}, \quad m^{(2)} = \frac{u_1\alpha - u_2(\beta + 1)}{\alpha + \beta + 1}, \quad m = \frac{u_1\alpha - u_2\beta}{\alpha + \beta},$$
(5.31)

$$\Theta^{(1)} = \frac{(u_1^2 + u_2^2)(\alpha + 1)\beta}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)^2}, \quad \Theta^{(2)} = \frac{(u_1^2 + u_2^2)\alpha(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)^2},$$

$$\Theta = \frac{(u_1^2 + u_2^2)\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}.$$

Из выражений (5.31) следуют формулы для параметров α и β :

$$\alpha = \left[\frac{(u_1^2 + u_2^2)(u_2 + m)(u_1 - m)}{(u_1 + u_2)^2 \Theta} - 1 \right] \frac{u_2 + m}{u_1 + u_2},$$

$$\beta = \left[\frac{(u_1^2 + u_2^2)(u_2 + m)(u_1 - m)}{(u_1 + u_2)^2 \Theta} - 1 \right] \frac{u_1 - m}{u_1 + u_2},$$

$$-u_2 < m < u_1, \quad 0 < \Theta < \frac{(u_1^2 + u_2^2)(u_2 + m)(u_1 - m)}{(u_1 + u_2)^2}.$$
(5.32)

Зависимости параметров α , β от моментов m , Θ позволяют получать замкнутые системы уравнений для вероятностных характеристик (4.3) в случае двухмоментной аппроксимации плотностей распределениями Пирсона I и II типов.

Для неустановившегося режима не удается получить аналитического решения относительно $j^{(1)}(y)$, $j^{(2)}(y, t)$, $f(y, t)$. Однако отметим, что система, описываемая уравнением (5.18), относится к классу линейных систем с марковской структурой. Эти системы рассмотрены в § 4.4, где показано, что для вероятностей структуры и моментов выходного сигнала можно составить точные диф-

дифференциальные уравнения в форме Коши, правые части которых не зависят от законов распределения. Для (5.18) эти уравнения находятся как частный случай уравнений (4.26) и имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -(v + \lambda) p^{(1)} + \lambda, \quad p^{(2)}(t) = 1 - p^{(1)}(t), \\ \dot{m}^{(1)} &= a(-m^{(1)} + b) + \frac{\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} (m^{(2)} - m^{(1)}), \\ \dot{m}^{(2)} &= a(-m^{(2)} - u_2) + \frac{v p^{(1)}}{p^{(2)}} (m^{(1)} - m^{(2)}), \\ \dot{\Theta}^{(1)} &= -2a\Theta^{(1)} + \frac{\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} [\Theta^{(2)} - \Theta^{(1)} + (m^{(1)} - m^{(2)})^2], \\ \dot{\Theta}^{(2)} &= -2a\Theta^{(2)} + \frac{v p^{(1)}}{p^{(2)}} [\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)} + (m^{(1)} - m^{(2)})^2], \\ m &= p^{(1)} m^{(1)} + p^{(2)} m^{(2)}, \\ \Theta &= p^{(1)} [\Theta^{(1)} + (m^{(1)})^2] + p^{(2)} [\Theta^{(2)} + (m^{(2)})^2] - m^2.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Как показано в п. 5.3.4, если нас не интересуют условные дисперсии выходного сигнала, то остальные характеристики $p^{(1)}(t)$, $p^{(2)}(t)$, $m^{(1)}(t)$, $m^{(2)}(t)$, $\Theta(t)$ можно найти из более простых уравнений (5.9), которые в данном случае записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -(v + \lambda) p^{(1)} + \lambda, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\ \dot{\mu}^{(1)} &= -(a + v) \mu^{(1)} + \lambda \mu^{(2)} + a p^{(1)} u_1, \\ \dot{\mu}^{(2)} &= -(a + \lambda) \mu^{(2)} + v \mu^{(1)} - a p^{(1)} u_2, \\ \dot{\Phi} &= 2a [-\Phi + \mu^{(1)} u_1 - \mu^{(2)} u_2], \\ \Theta &= \Phi - m^2, \quad m = \mu^{(1)} + \mu^{(2)}, \quad m^{(s)} = \mu^{(s)} / p^{(s)} \quad (s = 1, 2).\end{aligned}\quad (5.34)$$

Если нас интересуют только $p^{(s)}(t)$ и $m(t)$, то они находятся из уравнений (5.10):

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -(v + \lambda) p^{(1)} + \lambda, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\ \dot{m} &= -am + a(p^{(1)} u_1 - p^{(2)} u_2).\end{aligned}\quad (5.35)$$

Для установившегося режима из (5.35), в частности, следует

$$m = \frac{\lambda u_1 - v u_2}{v + \lambda} = \frac{\alpha u_1 - \beta u_2}{\alpha + \beta},$$

что совпадает с формулой (5.31) для m . Аналогичное совпадение дает проверка других формул для моментов.

В заключение рассмотрим, как влияет случайный двоичный сигнал на стохастическую устойчивость системы. Известно, что

асимптотическая устойчивость линейной стационарной системы не зависит от входного сигнала. Это справедливо и для случайного двоичного сигнала. Математическим подтверждением могут служить уравнения для безусловных математических ожиданий и дисперсий:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -(\lambda + \nu)p^{(1)} + \lambda, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\ \dot{m} &= -am + a(p^{(1)}u_1 - p^{(2)}u_2), \\ \dot{\vartheta} &= -(a + \nu + \lambda)\vartheta + (\lambda - \nu)m + a(p^{(1)}u_1 + p^{(2)}u_2), \\ \dot{\Theta} &= -2a\Theta + a(u_1 + u_2)[\vartheta + (p^{(2)} - p^{(1)})m],\end{aligned}\quad (5.36)$$

где $\vartheta \triangleq \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$.

Устойчивость в среднеквадратическом определяется однородным уравнением $\dot{\Theta} = -2a\Theta$, а устойчивость в среднем — однородным уравнением $\dot{m} = -am$, которые не зависят от характеристик входного сигнала.

Пример 5.6. На вход сглаживающего RC -фильтра поступает случайный телеграфный сигнал, который образуется путем прерывания постоянного сигнала с помощью ключа (рис. 5.9).

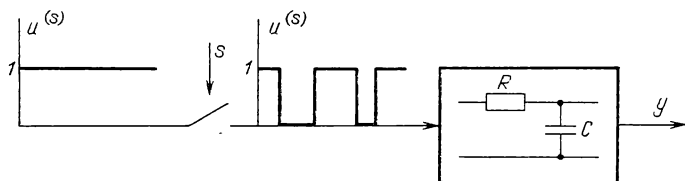


Рис. 5.9. Сглаживание случайного телеграфного сигнала инерционной RC -цепочкой

Чередующиеся случайные интервалы замыкания и размыкания ключа распределены по показательному закону. Среднее время одного интервала замыкания $T_1 = \nu^{-1}$, среднее время одного интервала размыкания $T_2 = \lambda^{-1}$.

В начальный момент времени ключ разомкнут, конденсатор разряжен. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе фильтра.

По условиям задачи математическая модель исследуемой системы описывается уравнением (5.18), где

$$\begin{aligned}u_1 &= 1, \quad u_2 = 0, \quad a = 1/RC, \\ \nu^{(21)} &= \nu, \quad \nu^{(12)} = \lambda, \quad p^{(1)}(0) = 0, \\ m(0) &= 0, \quad \Theta(0) = 0.\end{aligned}$$

Математическое ожидание и дисперсия выходного сигнала определяются уравнениями (5.30):

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -(\nu + \lambda)p^{(1)} + \lambda, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\ \dot{\mu}^{(1)} &= -(a + \nu)\mu^{(1)} + \lambda\mu^{(2)} + ap^{(1)}, \quad \dot{\mu}^{(2)} = -(a + \lambda)\mu^{(2)} + \nu\mu^{(1)},\end{aligned}$$

$$\dot{\Phi} = -2a\Phi + 2a\mu^{(1)}, \quad \dot{m} = \mu^{(1)} + \mu^{(2)}, \quad \Theta = \Phi - m^2, \\ p^{(1)}(0) = 0, \quad p^{(2)}(0) = 1, \quad \mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

Полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решается известными методами аналитически или численно. В частном случае при $v = \lambda$ решение имеет вид (при $a \neq 2v$)

$$p^{(1)}(t) = 0,5(1 - e^{-2vt}), \quad p^{(2)}(t) = 1 - p^{(1)}(t), \\ m(t) = 0,5 \left(1 - \frac{2v}{a-2v} e^{-at} + \frac{a}{a-2v} e^{-2vt} \right), \\ \Theta(t) = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{2(a+2v)} - \frac{(a^2 - av - 6v^2)e^{-2at}}{(a+2v)(a-2v)^2} + \right. \\ \left. + \frac{8v^2 e^{-(a+2v)t}}{(a+2v)(a-2v)^2} + \frac{ae^{-2vt}}{2(a-2v)^2} \right].$$

В установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$) имеем

$$p^{(1)} = p^{(2)} = 0,5; \quad m = 0,5; \quad \Theta = \frac{a}{4(a+2v)}.$$

§ 5.5. Сглаживание случайного двоичного сигнала дискретным инерционным фильтром

5.5.1. Закон распределения выходного сигнала. Рассмотрим частный случай дискретной линейной системы с марковской структурой, изменения которой соответствуют изменениям

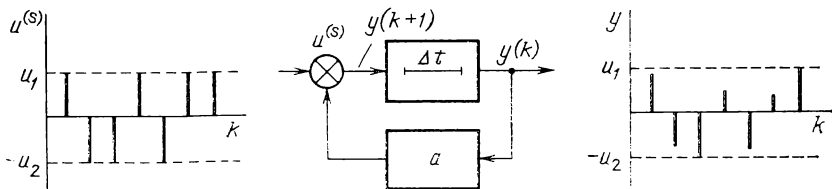


Рис. 5.10. Преобразование случайного двоичного дискретного сигнала дискретным инерционным фильтром

величины входного случайного двоичного сигнала. Система описывается уравнением

$$y(k+1) = ay(k) + u^{(r)}(k), \quad 0 < a < 1, \quad (5.37)$$

где $u^{(r)}(k) \triangleq u(s(k), k)$; $r \triangleq s(k)$ — марковская цепь с двумя состояниями ($r = 1, 2$), заданная вероятностями переходов

$$q^{(sr)} \triangleq q(s(k+1) | s(k)) \quad (s, r = 1, 2).$$

$$q^{(11)} = 1 - q^{(21)}, \quad q^{(22)} = 1 - q^{(12)}, \quad q^{(21)} = q, \quad q^{(12)} = l;$$

$u^{(r)}(k)$ — случайный двоичный сигнал со значениями $u^{(1)} = u_1$, $u^{(2)} = -u_2$ (рис. 5.10).

Составим уравнения (4.33) для совместной плотности вероятности выходного сигнала y и индекса структуры z . В данной задаче (с учетом принятых в § 4.5 обозначений $y \triangleq y(k+1)$, $x \triangleq y(k)$) они имеют вид

$$\begin{aligned} f(y, 1, k+1) &= (1-q) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-ax-u_1) f(x, 1, k) dx + \\ &\quad + l \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-ax+u_2) f(x, 2, k) dx, \\ f(y, 2, k+1) &= q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-ax-u_1) f(x, 1, k) dx + \\ &\quad + (1-l) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-ax+u_2) f(x, 2, k) dx, \end{aligned} \quad (5.38)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Взяв интегралы в (5.38), получим

$$\begin{aligned} f(y, 1, k+1) &= (1-q) f\left(\frac{y-u_1}{a}, 1, k\right) + l f\left(\frac{y+u_2}{a}, 2, k\right), \\ f(y, 2, k+1) &= q f\left(\frac{y-u_1}{a}, 1, k\right) + (1-l) f\left(\frac{y+u_2}{a}, 2, k\right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Предполагая, что существует стационарное распределение, исключим из (5.39) переменную k . Получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных $f(y, 1)$, $f(y, 2)$:

$$\begin{aligned} f(y, 1) &= (1-q) f\left(\frac{y-u_1}{a}, 1\right) + l f\left(\frac{y+u_2}{a}, 2\right), \\ f(y, 2) &= q f\left(\frac{y-u_1}{a}, 1\right) + (1-l) f\left(\frac{y+u_2}{a}, 2\right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Аналитическое решение этой системы уравнений затруднительно, однако, основываясь на результатах предыдущего раздела, можно предполагать, что законы распределения в установившемся режиме будут близки к распределениям Пирсона I типа.

Точные выражения для вероятностей состояний структуры и моментов выходного сигнала можно тем не менее получить из решения обыкновенных разностных уравнений, как это показано в следующем параграфе.

5.5.2. Вероятности состояний структуры и моменты выходного сигнала. Для системы, описываемой уравнением (5.37), разностные уравнения для вероятностей и моментов являются частным случаем уравнений (4.50), (4.51):

$$\begin{aligned} p^{(1)}(k+1) &= (1-q-l)p^{(1)}(k) + l, \quad p^{(2)}(k+1) = 1 - p^{(1)}(k+1), \\ m^{(1)}(k+1) &= [p^{(1)}(k+1)]^{-1} \{ (1-q)p^{(1)}(k) [am^{(1)}(k) + u_1] + \\ &\quad + lp^{(2)}(k) [am^{(2)}(k) - u_2] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^{(2)}(k+1) &= [p^{(2)}(k+1)]^{-1} \{ qp^{(1)}(k) [am^{(1)}(k) + u_1] + \\
&\quad + (1-l)p^{(2)}(k) [am^{(2)}(k) - u_2] \}, \\
\Theta^{(1)}(k+1) &= [p^{(1)}(k+1)]^{-1} \{ (1-q)p^{(1)}(k) [a^2\Theta^{(1)}(k) + \\
&\quad + (m^{(1)}(k+1) - am^{(1)}(k) - u_1)^2] + lp^{(2)}(k) [a^2\Theta^{(2)}(k) + \\
&\quad + (m^{(1)}(k+1) - am^{(2)}(k) + u_2)^2] \}, \\
\Theta^{(2)}(k+1) &= [p^{(2)}(k+1)]^{-1} \{ qp^{(1)}(k) [a^2\Theta^{(1)}(k) + \\
&\quad + (m^{(2)}(k+1) - am^{(1)}(k) - u_1)^2] + \\
&\quad + (1-l)p^{(2)}(k) [a^2\Theta^{(2)}(k) + (m^{(2)}(k+1) - am^{(2)}(k) + u_2)^2] \}, \\
m(k) &= p^{(1)}(k)m^{(1)}(k) + p^{(2)}(k)m^{(2)}(k), \quad \Theta(k) = \Phi(k) - m^2(k), \\
\Phi(k) &= p^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k) + p^{(2)}(k)\Phi^{(2)}(k), \\
\Phi^{(s)}(k) &= \Theta^{(s)}(k) + (m^{(s)}(k))^2, \\
(s &= 1, 2).
\end{aligned}
\tag{5.41}$$

При вычислениях на ЦВМ удобнее воспользоваться более простой формой уравнений для моментов, в которой отсутствует деление на $p^{(s)}(k+1)$. Это уравнения (4.52), которые принимают здесь такой вид:

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(k+1) &= (1-q-l)p^{(1)}(k) + l, \quad p^{(2)}(k+1) = 1 - p^{(1)}(k+1), \\
\mu^{(1)}(k+1) &= (1-q)[a\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1] + \\
&\quad + [a\mu^{(2)}(k) - p^{(2)}(k)u_2], \\
\mu^{(2)}(k+1) &= q[a\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1] + \\
&\quad + (1-l)[a\mu^{(2)}(k) - p^{(2)}(k)u_2], \\
\Psi^{(1)}(k+1) &= (1-q)[a^2\Psi^{(1)}(k) + 2au_1\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1^2] + \\
&\quad + l[a^2\Psi^{(2)}(k) - 2au_2\mu^{(2)}(k) + p^{(2)}(k)u_2^2], \\
\Psi^{(2)}(k+1) &= q[a^2\Psi^{(1)}(k) + 2au_1\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1^2] + \\
&\quad + (1-l)[a^2\Psi^{(2)}(k) - 2au_2\mu^{(2)}(k) + p^{(2)}(k)u_2^2], \\
m(k) &= \mu^{(1)}(k) + \mu^{(2)}(k), \quad \Phi(k) = \Psi^{(1)}(k) + \Psi^{(2)}(k), \\
\Theta(k) &= \Phi(k) - m^2(k), \quad m^{(s)}(k) = \frac{\mu^{(s)}(k)}{p^{(s)}(k)}, \\
\Theta^{(s)}(k) &= \frac{\Psi^{(s)}(k)}{p^{(s)}(k)} - [m^{(s)}(k)]^2 \quad (s = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{5.42}$$

Если последователя не интересуют условные дисперсии выходного сигнала, то вероятностные характеристики можно определить из уравнений (5.12):

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(k+1) &= (1-q-l)p^{(1)}(k) + l, \quad p^{(2)}(k+1) = 1 - p^{(1)}(k+1), \\
\mu^{(1)}(k+1) &= (1-q)[a\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1] + l[a\mu^{(2)}(k) - p^{(2)}(k)u_2], \\
&\quad (5.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^{(2)}(k+1) &= q[a\mu^{(1)}(k) + p^{(1)}(k)u_1] + \\ &\quad + (1-l)[a\mu^{(2)}(k) - p^{(2)}(k)u_2], \\ \Phi(k+1) &= a^2\Phi(k) + 2a[u_1\mu^{(1)}(k) - u_2\mu^{(2)}(k)] + u_1^2p^{(1)}(k) + u_2^2p^{(2)}(k), \\ m(k) &= \mu^{(1)}(k) + \mu^{(2)}(k), \quad \Theta(k) = \Phi(k) - m^2(k).\end{aligned}$$

И, наконец, если ограничиться нахождением лишь $p^{(s)}(k)$ и $m(k)$, то их можно определить из уравнений (5.13):

$$\begin{aligned}p^{(1)}(k+1) &= (1-q-l)p^{(1)}(k) + l, \\ p^{(2)}(k+1) &= 1 - p^{(1)}(k+1), \\ m(k+1) &= am(k) + u_1p^{(1)}(k) - u_2p^{(2)}(k).\end{aligned}\tag{5.44}$$

Нетрудно убедиться, что в установившемся режиме $m(k+1) = m(k)$, откуда следует:

$$m(k) = \frac{u_1p^{(1)}(k) - u_2p^{(2)}(k)}{1-a} = \frac{lu_1 - qu_2}{(l+q)(1-a)}.$$

Пример 5.7. С командного пункта на дистанционно пилотируемый летательный аппарат по радиолинии поступает сигнал управления. Линия связи подвержена помехам, которые приводят к случайным прерываниям передачи информации, поступающей на вход фильтра. Передаваемый сигнал представляет собой последовательность импульсов одинаковой длительности, поступающих через одинаковые промежутки времени: $u(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Амплитуда импульсов практически постоянна, в течение времени переходного процесса фильтра $u(k) = u$, а длительность импульса пренебрежимо мала по сравнению с этим временем. Фильтр является дискретным аналогом апериодического звена.

Вероятности нарушения и восстановления связи равны соответственно q и l ($q+l < 1$).

Требуется найти вероятности исправного и неисправного состояний линии связи, математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе фильтра в установившемся режиме.

По условиям задачи математическая модель системы описывается уравнением (5.37), в котором $u_1 = (1-a)u$, $u_2 = 0$.

Согласно (5.43) искомые характеристики определяются из уравнений

$$\begin{aligned}p^{(1)}(k+1) &= (1-q-l)p^{(1)}(k) + l, \quad p^{(2)}(k+1) = 1 - p^{(1)}(k+1), \\ \mu^{(1)}(k+1) &= a[(1-q)\mu^{(1)}(k) + l\mu^{(2)}(k)] + \\ &\quad + (1-q)(1-a)up^{(1)}(k), \\ \mu^{(2)}(k+1) &= a[q\mu^{(1)}(k) + (1-l)\mu^{(2)}(k)] + q(1-a)up^{(1)}(k), \\ \Phi(k+1) &= a^2\Phi(k) + 2a(1-a)u\mu^{(1)}(k) + (1-a)^2u^2p^{(1)}(k).\end{aligned}$$

В установившемся режиме

$$\begin{aligned}p^{(s)}(k+1) &= p^{(s)}(k) = p^{(s)}, \\ \mu^{(s)}(k+1) &= \mu^{(s)}(k) = \mu^{(s)} \quad (s=1, 2), \quad \Phi(k+1) = \Phi(k) = \Phi,\end{aligned}$$

откуда следует:

$$p^{(1)} = \frac{l}{q+l}, \quad p^{(2)} = \frac{q}{q+l}, \quad m = \mu^{(1)} + \mu^{(2)} = \frac{lu}{q+l},$$

$$\Theta = \Phi - m^2 = \frac{lqu}{(q+l)^2} \left\{ 1 - \frac{2a(1-a)(q+l)}{(1+a)[1-a(1-q-l)]} \right\}.$$

Пример 5.8. Пусть тот же дистанционно пилотируемый летательный аппарат совершает маневр в горизонтальной плоскости в соответствии с командами, поступающими в дискретные моменты времени $k = 0, 1, 2, \dots$. Команда $u(k)$ представляет собой случайный двоичный сигнал со значениями W и $-W$.

Вероятность смены знака $u(k)$ в момент k равна $q < 0,5$. Боковое ускорение летательного аппарата $y(k)$ связано с командным сигналом разностным уравнением

$$y(k+1) = ay(k) + (1-a)u(k), \quad 0 < a < 1.$$

Начальная вероятность того, что $u(0) = W$, равна 0,5. Начальное математическое ожидание ускорения $m(0) = W/2$, начальная дисперсия $\Theta(0) = 0$. Требуется найти $m(k)$, $\Theta(k)$.

По условиям задачи математическая модель системы описывается уравнением (5.37), в котором $u_1 = u_2 = (1-a)W$, $l = q$.

Согласно (5.44), искомые вероятностные характеристики определяются уравнениями

$$p^{(1)}(k+1) = (1-2q)p^{(1)}(k) + q, \quad p^{(2)}(k+1) = 1 - p^{(1)}(k+1),$$

$$m(k+1) = am(k) + W(1-a)[p^{(1)}(k) - p^{(2)}(k)],$$

$$\Phi(k+1) = a(1-2q)\Phi(k) + W(1-a)(1-2q),$$

$$\Theta(k+1) = a^2\Theta(k) + 2Wa(1-a)\Phi(k),$$

$$p^{(1)}(0) = 0,5, \quad m(0) = 0,5W, \quad \Theta(0) = 0,$$

где $\Phi(k) \triangleq \mu^{(1)}(k) - \mu^{(2)}(k)$.

Поскольку начальные условные математические ожидания $\mu^{(1)}(0)$ и $\mu^{(2)}(0)$ не заданы, то их можно положить произвольными, удовлетворяющими условию $\mu^{(1)}(0) + \mu^{(2)}(0) = m(0)$. Поэтому, в частности, можно положить $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = 0,5m(0)$. Тогда $\Phi(0) = 0$.

Решение разностных уравнений при указанных начальных условиях дает:

$$p^{(1)}(k) = 0,5(1-2q)^k + 0,5[1 - (1-2q)^k] = 0,5, \quad p^{(2)}(k) = 0,5,$$

$$m(k) = 0,5Wa^2,$$

$$\Theta(k) = \frac{2a(1-a)(1-2q)W^2}{(1+a)[1-a(1-2q)]} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{a^{k-1}}{(a-1-2q)} [(1-a^2)(1-2q)^k + (a(1-2q)-1)a^k] \right\}.$$

Установившиеся (при $k \rightarrow \infty$) значения переменных равны:

$$p^{(1)} = p^{(2)} = 0,5, \quad m = 0, \quad \Theta = \frac{2a(1-a)(1-2q)W^2}{(1+a)[1-a(1-2q)]}.$$

МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СКАЧКООБРАЗНОЙ СМЕНОЙ СТРУКТУРЫ

§ 6.1. Мультиструктура марковских систем

В этой главе рассматриваются динамические системы с переменными режимами управления (с переменными структурами), изменяющимися скачкообразно в случайные моменты времени, не зависящие от фазовых координат. Эти изменения могут происходить по разным причинам. Например, как указывалось в гл. 1, в процессе функционирования могут происходить скачкообразные внезапные изменения параметров, отказы элементов и блоков, сбои в управляющей ЦВМ в контуре управления. Такие задачи с переменными режимами управления возникают в системах управления полетом летательных аппаратов, в системах промышленного назначения и других автоматах. Такие системы по введенной ранее классификации относятся к марковским с независимым распределением изменения структуры.

В общем случае в марковских системах происходят изменения структуры с переходом в одно из состояний из числа заданных детерминированных. Возможны и обратные переходы с восстановлением исходного состояния.

Практический интерес представляют два типа задач. Первый характерен для динамических систем с отказами или сбоями без восстановления. Второй имеет место, если в системе возможно восстановление предыдущих состояний. Например, временное прекращение поступления информации с последующим восстановлением, включение резервной цепи после отказа, устранение сбоя.

Задачи анализа стохастических процессов в таких системах неоднократно изучались с помощью различных частных методов [39, 47, 55, 57, 58, 59].

Рассмотрим общий метод, развиваемый в данной монографии, основанный на применении теории разрывных марковских процессов с поглощением и восстановлением реализаций, который предложен в ряде работ авторов [4, 12, 13, 28] и изложен в гл. 3 и 4.

Исходным моментом при применении развиваемого метода анализа систем с возможными нарушениями или различными режимами является определение числа возможных структур и функций поглощения, а также восстановления, если такие процессы имеют место, т. е. интенсивностей переходов в указанные

структуры. Таким образом, система является мультиструктурной, имеющей n возможных состояний с интенсивностями взаимных переходов $\nu^{(rs)}(t)$ ($r, s = \overline{1, n}$). Процессы поглощения и восстановления реализаций описываются функциями поглощения $\beta^{(rs)}(y, t)$ (3.54) и восстановления $\gamma^{(sr)}(y, t)$ (3.55) при $r, s = \overline{1, n}$.

Отличительной особенностью марковских систем является то, что вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ не зависят от фазовых координат и определяются уравнениями Колмогорова (2.54) или в форме (3.81). Эти уравнения интегрируются независимо. Тогда, зная матрицы поглощения $\mathbf{B}^*(y, t)$ и восстановления $\mathbf{\Gamma}^*(y, t)$, можно предварительно полностью оценить вероятности $p^{(s)}(t)$ нахождения системы марковской структуры в каждом из состояний. После определения $p^{(s)}(t)$ приближенными методами, изложенными в гл. 4, определяются вероятностные моменты фазовых координат в каждом из возможных режимов функционирования системы. По формулам (3.113)–(3.115) определяются безусловные вероятностные моменты фазовых координат.

§ 6.2. Вероятности состояний в системах с отказами

Случайные внезапные изменения параметров не всегда приводят к полному выходу из строя динамической системы. Включаются резервные элементы или цепи, и система переходит в другой режим функционирования, который предусмотрен при ее создании.

Обычно одно из состояний соответствует полному отказу системы, а другие — ее исправному функционированию. Перенумеровав все структуры в последовательности нарушений от исправного состояния к состоянию полного отказа, получим n

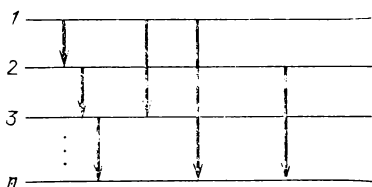


Рис. 6.1. Возможные состояния системы с нарушениями (отказами)

возможных структур. Переход системы из одного состояния функционирования в другое совершается в направлении увеличения номера. Направления возможных случайных переходов системы показаны на рис. 6.1. Переход в состояние полного отказа возможен из любого другого. Из-за случайности моментов времени появления отказа смена состояний системы

(переходы) в фазовом пространстве представляет собой случайный процесс. Физические предпосылки, лежащие в основе рассматриваемой системы, связанные с тем, что переходные вероятности в данный момент времени t не зависят от поведения системы до этого момента, позволяют сделать предположение о марковском характере этого процесса.

Динамику системы в каждой из возможных структур s будем характеризовать уравнениями общего вида (1.1) или (1.4) с

функциями поглощения $\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t)$ (3.54) и восстановления $\gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t)$ (3.55), имеющих вид при $q^{(sr)}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}', t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}')$

$$\begin{aligned}\beta^{(sr)}(\mathbf{y}, t) &= v^{(rs)}(t) f^{(s)}(\mathbf{y}, t) \quad (s = \overline{1, n-1}; r = s + 1), \\ \gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) &= v^{(sr)}(t) f^{(r)}(\mathbf{y}, t) \quad (r = \overline{1, n-1}; s = r + 1).\end{aligned}\quad (6.1)$$

Отличительным свойством этих систем является возможность только *однонаправленных* переходов. Следовательно, матричные функции поглощения $\mathbf{B}^*(\mathbf{y}, t)$ и восстановления $\mathbf{\Gamma}^*(\mathbf{y}, t)$ имеют треугольный отличный от нуля вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^*(\mathbf{y}, t) &= \begin{bmatrix} \beta^{(11)}(\mathbf{y}, t) & & 0 \\ & \ddots & \\ -\beta^{(n1)}(\mathbf{y}, t) & & \beta^{(nn)}(\mathbf{y}, t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Gamma}^*(\mathbf{y}, t) &= \begin{bmatrix} \gamma^{(11)}(\mathbf{y}, t) & \gamma^{(1n)}(\mathbf{y}, t) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma^{(nn)}(\mathbf{y}, t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Задача вероятностного анализа систем с отказами состоит в определении вероятности исправного состояния в зависимости от времени, среднего времени перехода из исправного в неисправное состояние, а также в оценке точности функционирования, т. е. вероятностных моментов фазовых координат и ошибки.

Как было показано в гл. 3, при распределенных независимых переходах вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ определяется уравнениями Колмогорова типа (3.84) и не зависят от фазовых координат. В системах с отказами при однонаправленных переходах эти уравнения следующие:

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r=s+1}^n v^{(rs)}(t) + \sum_{r=1}^{s-1} p^{(r)} v^{(sr)}(t), \quad p^{(s)}(t_0) = p_0^{(s)} \quad (s = \overline{1, n}), \quad (6.3)$$

где начальные условия заданы ($p_0^{(1)} = 1, p_0^{(2)} = \dots = p_0^{(n)} = 0$), а функции $v^{(sr)}$ являются заданными интенсивностями пуассоновских переходов.

Уравнения (6.3) легко последовательно интегрируются, поскольку каждое последующее уравнение зависит только от решений предыдущих. Интегралы уравнений (6.3) имеют вид

$$p^{(1)}(t) = \exp \left[- \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^t v^{(r1)}(\tau) d\tau \right], \quad (6.4)$$

$$p^{(s)}(t) = \exp \left[- \sum_{r=s+1}^n \int_{t_0}^t v^{(rs)}(\tau) d\tau \right] \sum_{q=1}^{s-1} \int_{t_0}^t v^{(sq)}(\tau') \times$$

$$\times p^{(q)}(\tau') \exp \left[\sum_{r=s+1}^n \int_{t_0}^{\tau'} v^{(rs)}(\sigma) d\sigma \right] d\tau' \quad (s = \overline{2, n-1}), \quad (6.5)$$

$$p^{(n)}(t) = \sum_{q=1}^{n-1} \int_{t_0}^t v^{(nq)}(\tau) p^{(q)}(\tau) d\tau. \quad (6.6)$$

Формула (6.4) характеризует вероятность исправного состояния системы. Эта вероятность уменьшается с течением времени, так как в системе происходят нарушения, и она переходит в по-

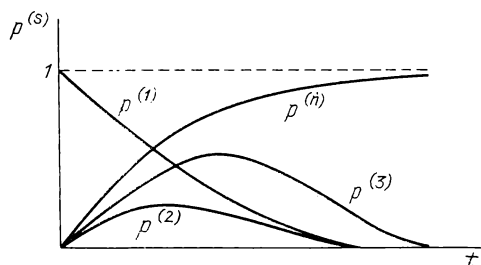


Рис. 6.2. Изменение вероятностей состояний системы

следующие указанные состояния. Формулы (6.5) характеризуют изменение со временем вероятности пребывания системы в промежуточных состояниях. Формула (6.6) дает возможность оценить изменяющуюся со временем вероятность конечного не-исправного состояния системы. Эта функция увеличивается со временем.

Плотность вероятности времени перехода $f_s(t)$ из s -го состояния определим по формуле (3.83). При $s = 1$ получаем

$$f_1(t) = \exp \left[- \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^t v^{(r1)}(\tau) d\tau \right] \sum_{r=2}^n v^{(r1)}(t), \quad (6.7)$$

а при $s = n$ получаем из (3.83) функцию плотности вероятности перехода в полностью неисправное состояние

$$f_n(t) = \sum_{r=1}^{n-1} p^{(r)}(t) v^{(nr)}(t). \quad (6.8)$$

На рис. 6.2 показан характер изменения этих вероятностей.

Воспользовавшись формулой (6.7), определим математическое ожидание m_t времени потери системой исправного состояния, т. е. среднее время перехода системы из исправного состояния в неисправное, и дисперсию D_t этого времени:

$$m_t = \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^{\infty} \tau v^{(r1)}(\tau) \exp \left[- \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^{\tau} v^{(r1)}(\sigma) d\sigma \right] d\tau, \quad (6.9)$$

$$D_t = \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^{\infty} (\tau - m_t)^2 v^{(r1)}(\tau) \exp \left[- \sum_{r=2}^n \int_{t_0}^{\tau} v^{(r1)}(\sigma) d\sigma \right] d\tau. \quad (6.10)$$

В ряде задач можно принять допущение о постоянстве интенсивностей ($\nu^{(sr)} = \text{const}$) переходов на интервалах времени функционирования системы. Тогда формулы (6.4) — (6.6) принимают вид

$$p^{(1)}(t) = \exp \left[- \sum_{r=2}^n \nu^{(r1)} t \right], \quad (6.11)$$

$$p^{(2)}(t) = \exp \left[- \sum_{r=s+1}^n \nu^{(rs)} t \right] \sum_{q=1}^{s-1} \nu^{(sq)} \int_0^t p^{(q)}(\tau) \exp \left[- \sum_{r=s+1}^n \nu^{(rs)} \tau \right] d\tau, \quad (6.12)$$

$$p^{(n)}(t) = \sum_{q=1}^{n-1} \nu^{(nq)} \int_0^t p^{(q)}(\tau) d\tau \quad (s = \overline{1, n}). \quad (6.13)$$

Формулы (6.9), (6.10) при постоянных интенсивностях пуассоновских переходов системы в каждую из рассматриваемых структур приобретают вид

$$m_t = \frac{1}{\sum_{r=2}^n \nu^{(r1)}}, \quad D_t = \frac{1}{\left[\sum_{r=2}^n \nu^{(r1)} \right]^2}. \quad (6.14)$$

Если процесс смены структуры является простой марковской цепью при дискретном времени с интенсивностями переходов $\nu^{(sr)}(k)$, зависящими от моментов времени $t_k = kT_n$, то уравнения для вероятностей состояния принимают вид

$$p^{(s)}(k+1) = p^{(s)}(k) - T_n \left[p^{(s)}(k) \sum_{r=s+1}^n \nu^{(rs)}(k) + \sum_{r=1}^{s-1} p^{(r)}(k) \nu^{(sr)}(k) \right],$$

$$p^{(s)}(0) = p_0^{(s)} \quad (s = \overline{1, n}). \quad (6.15)$$

В формулах (6.4) — (6.6) интегралы следует заменить суммами, а формулы (6.14) сохраняют прежний вид.

§ 6.3. Вероятностные характеристики фазовых координат в системах с отказами

Вероятностные моменты фазовых координат динамической системы с отказами определяются из уравнений, полученных в § 3.10. В гауссовском приближении для нелинейной исходной системы вида

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}^{(s)}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}(t) \xi(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (6.16)$$

уравнения для условного вектора математического ожидания $\mathbf{m}^{(s)}(t)$ и дисперсионной матрицы $\Theta^{(s)}(t)$ записаны соответственно в виде (3.110) и (3.112). Примем во внимание, что для рассматриваемой системы в соответствии с (2.38), (2.40) вектор сноса

$\alpha^{(s)}(y, t)$ и матрица диффузии $D^{(s)}(y, t)$ имеют форму

$$\begin{aligned}\alpha^{(s)}(y, t) &= a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t)u, \\ D^{(s)}(y, t) &= F^{(s)}(t)G(t)F^{(s)T}(t).\end{aligned}\quad (6.17)$$

Вектор плотности потока вероятности $\pi^{(s)}(y, t)$ на основании (3.28), (3.58) с учетом (6.17) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\pi^{(s)}(y, t) &= [a^{(s)}(y, t) + B^{(s)}(y, t)u] f^{(s)}(y, t) - \\ &- (1/2)[F^{(s)}(t)G(t)F^{(s)T}(t)\nabla_y^T f^{(s)}(y, t)].\end{aligned}\quad (6.18)$$

Подставляя (6.18) в правую часть (3.110), получаем для вектора условного математического ожидания $m^{(s)}$ для каждого s следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{m}^{(s)} &= a_0^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) + B_0^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t)u - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} (m^{(s)} - m^{(r)}) \right] \quad (s = \overline{1, n}),\end{aligned}\quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned}a_0^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) dy, \\ B_0^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) dy.\end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения для дисперсионной матрицы $\Theta^{(s)}$, применим статистическую линеаризацию нелинейной векторной функции $a^{(s)}(y, t)$ в гауссовском приближении:

$$a^{(s)}(y, t) = a_0^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) + K_a^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t)(y - m^{(s)}), \quad (6.20)$$

где $K_a^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t)$ — матрица коэффициентов статистической линеаризации [22, 23, 27, 74]. Подставляя (6.18) с использованием (6.20) в правую часть (3.112), получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}^{(s)} &= K_a^{(s)}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t)\Theta^{(s)} + \Theta^{(s)}K_a^{(s)T}(m^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) + \\ &+ F^{(s)}(t)G(t)F^{(s)T}(t) - \sum_{r=1 \neq s}^n \left\{ v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \times \right. \\ &\times \left. [\Theta^{(s)} - \Theta^{(r)} - (m^{(r)} - m^{(s)})(m^{(r)} - m^{(s)})^T] \right\} \quad (s = \overline{1, n}).\end{aligned}\quad (6.21)$$

Уравнения (6.19), (6.21) следует рассматривать и интегрировать совместно с учетом уравнений (6.3) и формул (6.4) — (6.6).

Для определения безусловных вектора математического ожидания $m(t)$ и матрицы $\Theta(t)$ в любой текущий момент времени следует воспользоваться формулами (3.113), (3.115). В рассматриваемой системе с отказами в пределе устанавливается режим,

когда все $\dot{p}^{(r)}(t = \infty) = 0$ ($r = \overline{1, n-1}$). Для этого момента времени в стационарной системе следует считать все $\dot{m}^{(r)}(\infty) = 0$ и $\dot{\Theta}^{(r)}(\infty) = 0$ ($r = \overline{1, n-1}$), а для определения $m^{(n)}$ и $\Theta^{(n)}$ при $p^{(n)} = 1$ из (6.19), (6.21) получаем

$$a_0^{(s)}(m^{(n)}, \Theta^{(n)}) + B_0^{(n)}(m^{(n)}, \Theta^{(n)}) u = 0, \quad (6.22)$$

$$K_a^{(n)}(m^{(n)}, \Theta^{(n)}) \Theta^{(n)} + \Theta^{(n)} K_a^{(n)T}(m^{(n)}, \Theta^{(n)}) + F^{(n)} G F^{(n)} = 0.$$

Из уравнений (6.22) определяются $m^{(n)} = m$ и $\Theta^{(n)} = \Theta$ для установившегося режима полного отказа системы.

Если динамическая система (1.2) линейна в каждом состоянии, то уравнения (6.19) и (6.21) не связаны между собой и имеют вид

$$\dot{m}^{(s)} = A^{(s)}(t) m^{(s)} + B^{(s)}(t) u - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} (m^{(s)} - m^{(r)}), \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & A^{(s)}(t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} A^{(s)T}(t) + F^{(s)}(t) G(t) F^{(s)T}(t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} [\Theta^{(s)} - \Theta^{(r)} - (m^{(r)} - m^{(s)})(m^{(r)} - m^{(s)})^T] \\ & (s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Для определения $p^{(s)}(t)$ используются уравнения (6.3).

Пример 6.1. Следящая система имеет уравнение

$$(Tp^2 + p + k)y = k[x + \xi(t)],$$

структуру, изображенную на рис. 6.3, и нулевые начальные условия: $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Система может находиться в четырех состояниях, характеризующихся параметрами k и T :

- 1) $k = k_0 = 5$, $T = T_0 = 0,1$ с; 2) $k = k_0 = 5$, $T = T_1 = 0,2$ с;
- 3) $k = k_1 = 3$, $T = T_0 = 0,1$ с; 4) $k = k_1 = 3$, $T = T_1 = 0,2$ с.

Первое состояние является исправным. Интенсивности переходов $v^{(sr)}$ из r -го состояния в s -е постоянны и равны $v^{(21)} = 0,1$; $v^{(31)} = 0,2$; $v^{(32)} = 0,1$; $v^{(42)} = 0,1$; $v^{(43)} = 0,2$; $v^{(41)} = 0,2$; остальные интенсивности равны нулю. Входная переменная $x(t) = a_0 + a_1 t$; a_0, a_1 — постоянные; $\xi(t)$ — белый шум с интенсивностью $G = 0,1$ с⁻¹; $M[\xi(t)] = 0$. Для анализа этой системы воспользуемся изложенной теорией.

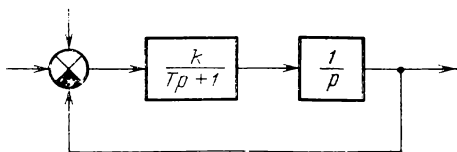


Рис. 6.3. Схема следящей системы

Для определения вероятностей состояния $p^{(s)}(t)$ ($s = \overline{1, 4}$) используем уравнения типа (6.3):

$$\dot{p}^{(1)} = -p^{(1)} \sum_{r=2}^4 v^{(r1)}, \quad p^{(1)}(0) = 0,7,$$

$$\dot{p}^{(2)} = -p^{(2)} \sum_{r=3}^4 v^{(r2)} + p^{(1)}v^{(21)}, \quad p^{(2)}(0) = 0,1,$$

$$\dot{p}^{(3)} = -p^{(3)}v^{(43)} + p^{(1)}v^{(31)} + p^{(2)}v^{(32)}, \quad p^{(3)}(0) = 0,1,$$

$$\dot{p}^{(4)} = \sum_{r=1}^3 p^{(r)}v^{(4r)}, \quad p^{(4)}(0) = 0,1.$$

Для определения вероятностных моментов фазовых координат представим уравнение следящей системы в следующей форме.

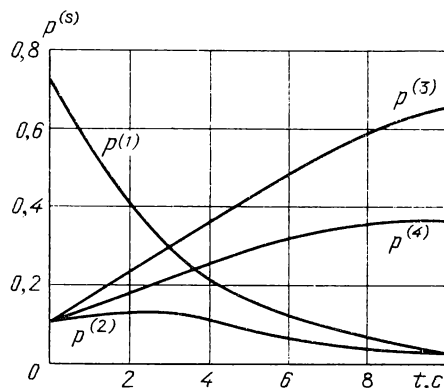


Рис. 6.4. Графики функции $p^{(s)}(t)$ вероятности состояний системы с отказами

введя обозначение $y = y_1$:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad y_1(0) = 0,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{k}{T} y_1 - \frac{1}{T} \dot{y}_2 + \frac{k}{T} (x + \xi), \quad y_2(0) = 0.$$

Для вектора математического ожидания $\mathbf{m}^{(s)\tau} = [\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}]$ и ковариантной матрицы

$$\Theta^{(s)} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(s)} & \theta_{12}^{(s)} \\ \theta_{12}^{(s)} & \theta_{22}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (s = \overline{1, 4})$$

на основании (6.23) и (6.24) получим уравнения

$$\dot{\mathbf{m}}^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{m}^{(s)} - \sum_{r=1 \neq s}^4 v^{(sr)} \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} (\mathbf{m}^{(s)} - \mathbf{m}^{(r)}) + \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{x},$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} &= \mathbf{A}^{(s)} \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\tau} + \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{G} \mathbf{F}^{(s)\tau} - \\ &- \sum_{r=1, r \neq s}^4 \left\{ \nu^{(sr)} \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} [\Theta^{(s)} - \Theta^{(r)} - (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}) (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^{\tau}] \right\} \\ (s &= \overline{1,4}), \quad \mathbf{m}^{(s)}(0) = 0, \quad \Theta^{(s)}(0) = 0, \\ \mathbf{A}^{(s)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом четырех вариантов для анализа такой следящей системы со скачкообразными нарушениями параметров необходимо совместно интегрировать 24 дифференциальных уравнения. Из них четыре уравнения для вероятностей состояния $p^{(s)}(t)$,

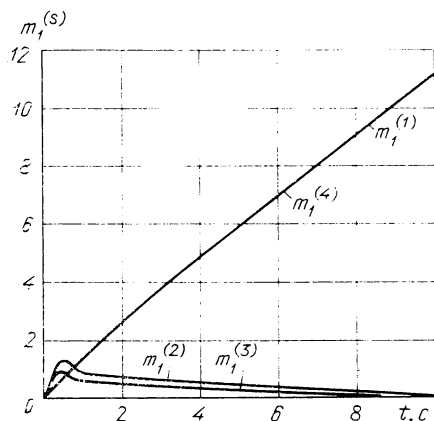


Рис. 6.5. Графики функции $m_1^{(s)}(t)$

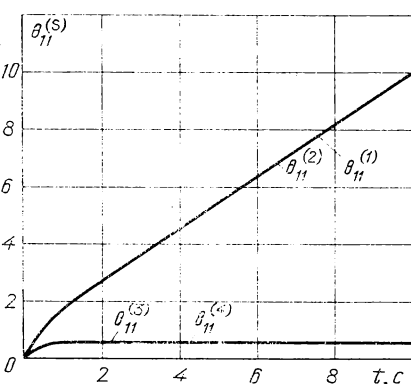


Рис. 6.6. Графики функции $\theta_{11}^{(s)}(t)$

восемь уравнений для математических ожиданий $m_i^{(s)}$ и 12 уравнений для корреляционных моментов $\theta_{ij}^{(s)}$ фазовых координат.

На рис. 6.4 изображены функции вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ следящей системы. На рис. 6.5 и 6.6 изображены результаты вычислений условных моментов $m_1^{(s)}(t)$, $\theta_n^{(s)}(t)$.

Безусловные величины $m_1(t) = \sum_{s=1}^4 p^{(s)}(t) m_1^{(s)}(t)$ и $\theta^{(s)}(t) = \sum_{s=1}^4 p^{(s)} [\theta_{11}^{(s)} + (m_1^{(s)} - m_1)^2]$ рассчитываются по формулам (3.113) и (3.115).

§ 6.4. Вероятности состояний в системах с нарушениями и восстановлением

Если в динамической системе, в частности с отказами некоторых элементов или прерыванием информации в процессе функционирования, возможно восстановление исходного или про-

межуточного состояния путем включения резервных элементов цепей и других мероприятий, то система является *мультиструктурной* с полноразмерными матричными функциями поглощения $\mathbf{B}^*(y, t)$ и восстановления $\mathbf{\Gamma}^*(y, t)$.

Пусть мультиструктурная система описывается уравнениями общего вида (6.16). Достаточно простой и во многих задачах приемлемый алгоритм расчета вероятностных характеристик такой мультиструктурной системы можно получить в гауссовском приближении для функций $f^{(s)}(y, t)$. Этот алгоритм содержит уравнения для вероятностей состояний $p^{(s)}(t)$ типа (3.84) и уравнения для вероятностных моментов типа (3.110), (3.112). Уравнения (3.84) для вероятностей состояний $p^{(s)}(t)$ не зависят от фазовых координат и имеют в данной задаче вид

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(rs)}(t) + \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)} v^{(sr)}(t), \quad p^{(s)}(t_0) = p_0^{(s)}. \quad (6.25)$$

Эти уравнения интегрируются независимо от уравнений для моментов. При нестационарных интенсивностях $v^{(sr)}(t)$ эти уравнения решаются численно с помощью ЦВМ.

Если интенсивности переходов $v^{(sr)}$ постоянны, то может быть получено аналитическое решение уравнений (6.25), которое полностью определяется начальными условиями и корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sum_{r=1}^n v^{(r1)} & -v^{(12)} & \dots & -v^{(1n)} \\ -v^{(21)} & \lambda + \sum_{r=1}^n v^{(r2)} & \dots & -v^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v^{(n1)} & -v^{(n2)} & \dots & \lambda + \sum_{r=1}^n v^{(rn)} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.26)$$

Алгоритм решения этой задачи хорошо разработан, решения имеют вид

$$p^{(s)}(t) = \sum_{r=1}^n A_r^{(s)} e^{\lambda_r t} \quad (s = \overline{1, n}), \quad (6.27)$$

где λ_r — корни уравнения (6.26), а $A_r^{(s)}$ определяется из начальных условий $p^{(s)}(t_0) = p_0^{(s)}$.

В задачах, в которых можно считать $v^{(sr)} = \text{const}$, возможен установившийся режим при $t = \infty$. В этом режиме $p^{(s)}$ не зависят от времени. Тогда в уравнениях (6.25) следует положить $\dot{p}^{(s)} = 0$, и для установившегося режима имеем алгебраические уравнения

$$\sum_{r=1 \neq s}^n (p^{(s)} v^{(rs)} + p^{(r)} v^{(sr)}) = 0, \quad \sum_{r=1}^n p^{(r)} = 1. \quad (6.28)$$

Разрешим систему уравнений (6.28) относительно $p^{(k)}$ ($k = \overline{2, n}$), выразив их через $p^{(1)}$:

$$p^{(k)} = \frac{\Delta_1^{(k)}}{\Delta_1} p^{(1)} \quad (k = \overline{2, n}), \quad (6.29)$$

где детерминант Δ_1 имеет вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v^{(21)} & v^{(31)} & \dots & v^{(n-11)} & v^{(n1)} \\ -\sum_{r=1}^n v^{(2r)} & v^{(32)} & \dots & v^{(n-12)} & v^{(n2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v^{(2n)} & v^{(3n)} & \dots & -\sum_{r=1}^n v^{(nr-1)} & v^{(nn-1)} \end{vmatrix}. \quad (6.30)$$

$\Delta_1^{(k)}$ — детерминант Δ_1 с замененным k -м столбцом на столбец

$$\begin{bmatrix} -\sum_{r=1}^n v^{(1r)} \\ -v^{(12)} \\ \vdots \\ -v^{(1n-1)} \end{bmatrix}.$$

Подставим выражение (6.29) в уравнения (6.28) и разрешим относительно $p^{(1)}$. В результате получим формулу для $p^{(1)}$:

$$p^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \sum_{k=2}^n \Delta_1^{(k)}}. \quad (6.31)$$

Если (6.31) подставить в (6.29), то получим окончательные формулы для $p^{(k)}$ ($k = \overline{2, n}$):

$$p^{(k)} = \frac{\Delta_1^{(k)}}{\Delta_1 + \sum_{k=2}^n \Delta_1^{(k)}} \quad (k = \overline{2, n}). \quad (6.32)$$

§ 6.5. Вероятностные характеристики фазовых координат в системах с нарушениями и восстановлением

Вероятностные характеристики фазовых координат марковской системы в каждом состоянии могут быть получены из уравнений § 3.10 или из соответствующих уравнений гл. 4.

Пусть нелинейная система со случайной структурой описывается теми же уравнениями (6.16). При гауссовской аппроксимации функций $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ после применения статистической линеаризации нелинейных зависимостей $\mathbf{a}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ получим из (3.110) и (3.112) для векторов математического ожи-

дания $\mathbf{m}^{(s)}(t)$ и дисперсионных матриц $\Theta^{(s)}(t)$ следующие уравнения:

$$\dot{\mathbf{m}}^{(s)} = \mathbf{a}_0^{(s)}(\mathbf{m}^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) + \mathbf{B}_0^{(s)}(\mathbf{m}^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) \mathbf{u} - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} (\mathbf{m}^{(s)} - \mathbf{m}^{(r)}) \right] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (6.33)$$

$$\dot{\Theta}^{(s)} = \mathbf{K}_a^{(s)}(\mathbf{m}^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{K}_a^{(s)T}(\mathbf{m}^{(s)}, \Theta^{(s)}, t) - \sum_{r=1 \neq s}^n \left\{ v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} [\Theta^{(s)} - \Theta^{(r)} - (\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})(\mathbf{m}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)})^T] \right\} \quad (s = \overline{1, n}), \quad (6.34)$$

где $\mathbf{a}_0^{(s)} = M[\mathbf{a}^{(s)}(\mathbf{y}, t)]$, $\mathbf{B}_0^{(s)} = M[\mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{y}, t)]$ при гауссовской плотности $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$; $\mathbf{K}_a^{(s)}$ — матрица коэффициентов статистической линеаризации. Решение задачи определения вероятностных характеристик фазовых координат достигается совместным интегрированием уравнений (6.33), (6.34) с учетом (6.25) при заданных начальных условиях $\mathbf{m}^{(s)}(t_0)$, $\Theta^{(s)}(t_0)$.

Более полная ступень вероятностного анализа мультиструктурной системы достигается на основе применения аппроксимации многомерных функций $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ следующими зависимостями [27]:

$$f^{(s)}(\mathbf{y}, t) = \prod_{h=1}^{n_y} f^{(s)}(y_h, t) \times \left\{ 1 + \sum_{p=2}^{n_y} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\theta_{pq}^{(s)}(t)}{\theta_{pp}^{(s)}(t) \theta_{qq}^{(s)}(t)} [y_p - m_p^{(s)}(t)] [y_q - m_q^{(s)}(t)] \right\}, \quad (6.35)$$

где $f^{(s)}(y_h, t)$ — одномерная функция плотности вероятности s -й структуры для h -й координаты; $m_p^{(s)}(t)$ — математические ожидания фазовых координат; $\theta_{pq}^{(s)}(t)$ — вторые центральные моменты координат системы. Для определения этих вероятностных моментов служат уравнения (6.33), (6.34), а для одномерных функций $f^{(s)}(y_h, t)$, как показано в [32], можно получить дифференциальные уравнения. Эти уравнения находятся из (3.87) после интегрирования левых и правых частей по переменным $y_1, \dots, y_{h-1}, y_{h+1}, \dots, y_{n_y}$ кроме переменной y_h . В результате имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial f^{(s)}(y_h, t)}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_h} \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}^{(h)} - \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} [f^{(s)}(y_h, t) - f^{(r)}(y_h, t)] \quad (s = \overline{1, n}), \quad (6.36)$$

где $d\mathbf{y}^{(h)} = dy_1 \dots dy_{h-1} dy_{h+1} \dots dy_{n_y}$.

Для приближенного интегрирования уравнений (6.36) и решения данной задачи применим метод ортогонального разложения [25, 32], представив функции $f^{(s)}(y_h, t)$ в форме

$$f^{(s)}(y_h, t) = f_0^{(s)}(y_h, t) + \sum_{i=3}^{\infty} \alpha_i^{(s)} Q_i^{(s)}(y_h, t) \quad (h = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}), \quad (6.37)$$

где

$$f_0^{(s)}(y_h, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{hh}^{(s)}}} \exp \left[-\frac{(y_h - m_h^{(s)}(t))^2}{2\theta_{hh}^{(s)}(t)} \right]; \quad (6.38)$$

$$Q_i^{(s)}(y_h, t) = \frac{(-1)^i}{\sqrt{\theta_{hh}^{(s)}(t)}} H_i(y_h) f_0^{(s)}(y_h, t); \quad (6.39)$$

$$\alpha_3^{(s)} = -\frac{1}{3!} q_{h3}^{(s)}, \quad \alpha_4^{(s)} = \frac{1}{4!} [q_{h4}^{(s)} - 3(\theta_{hh}^{(s)})^2],$$

$$\alpha_5^{(s)} = -\frac{1}{5!} [q_{h5}^{(s)} - 10q_{h3}^{(s)}\theta_{hh}^{(s)}], \quad (6.40)$$

$$\alpha_6^{(s)} = \frac{1}{6!} [q_{h6}^{(s)} - 15q_{h4}^{(s)}\theta_{hh}^{(s)} - 30(\theta_{hh}^{(s)})^3];$$

.....

$q_{hj}^{(s)}$ — центральные моменты j -го порядка h -й переменной; $H_i(y_h)$ — полиномы Чебышева — Эрмита [32].

Центральные моменты $q_{hj}^{(s)}$ определяются из уравнений, которые получаются путем умножения (6.36) на $(y_h - m_h^{(s)})^j$ и интегрирования по переменной y_h :

$$\dot{q}_{hj}^{(s)} = j \int_{-\infty}^{\infty} \pi_h^{(s)}(y, t) (y_h - m_h^{(s)})^{j-1} dy -$$

$$- \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \frac{p^{(r)}(t)}{p^{(s)}(t)} \left[q_{hj}^{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} (y_h - m_h^{(s)})^j f_0^{(s)}(y_h, t) dy_h \right]$$

$$(j = 3, 4, \dots; s = \overline{1, n}). \quad (6.41)$$

Формулы (6.35), (6.37) — (6.39) и уравнения (6.41), (6.25), (6.33), (6.34) вместе с формулами для статистических коэффициентов линеаризации образуют замкнутую систему, представляющую собой полный алгоритм определения функций плотностей вероятностей $f^{(s)}(y, t)$ и $f^{(s)}(y_h, t)$ ($h = \overline{1, n_y}$). После определения этих функций могут быть вычислены уточненные моментные характеристики фазовых координат динамической системы.

§ 6.6. Двухструктурная марковская система с переменными режимами управления

Широко распространенным и практически важным видом системы со случайно перестраиваемой структурой является двухструктурная, т. е. система с двумя детерминированными состояниями и распределенными переходами с интенсивностями, зависящими только от времени. К ним, например, относятся системы, имеющие два возможных состояния: исправное и неисправное (с отказом), но восстанавливаемое, а также системы со случайным перерывом и восстановлением информации, необходимой для управления. В обеих рассматриваемых системах при отказе или при случайных перерывах информации, поступающей в нее по информационному каналу, структура изменяется скачком. При восстановлении отказываемого элемента или при возобновлении информации система переходит скачком к первоначальной структуре.

При вероятностном анализе таких систем практический интерес представляют оценки первых двух вероятностных моментов фазовых координат: вектора математического ожидания и корреляционной матрицы. Используя эти оценки, можно определить вероятностные характеристики точности для любой координаты.

Пусть динамика системы в каждом из двух состояний описывается линейными уравнениями n_y -го порядка

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}(t)\xi(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (s = 1, 2), \quad (6.42)$$

а интенсивности независимых распределенных переходов из состояний (1) в (2) и обратно будут $\nu^{(21)}(t)$, $\nu^{(12)}(t)$. Уравнения Колмогорова (6.25) для этой системы следующие:

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(1)} &= -p^{(1)}\nu^{(21)}(t) + p^{(2)}\nu^{(12)}(t), & p^{(1)}(t_0) &= p_0^{(1)}, \\ \dot{p}^{(2)} &= -p^{(2)}\nu^{(12)}(t) + p^{(1)}\nu^{(21)}(t), & p^{(2)}(t_0) &= p_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Так как в данном случае $p^{(2)} = 1 - p^{(1)}$, то уравнения (6.43) можно представить для одной вероятности $p^{(1)}(t)$ в виде

$$\dot{p}^{(1)} = -p^{(1)}[\nu^{(12)}(t) + \nu^{(21)}(t)] + \nu^{(12)}(t), \quad p^{(1)}(t_0) = p_0^{(1)}. \quad (6.44)$$

Решение уравнения (6.44) следующее:

$$p^{(1)}(t) = \left\{ \int_{t_0}^t \nu^{(12)}(\tau) \exp \left[\int_{t_0}^{\tau} \nu(\sigma) d\sigma \right] d\tau \right\} \exp \left[- \int_{t_0}^t \nu(\sigma) d\sigma \right], \quad (6.45)$$

где $\nu(\sigma) = \nu^{(21)}(\sigma) + \nu^{(12)}(\sigma)$. Если $\nu^{(12)} = \text{const}$, $\nu^{(21)} = \text{const}$, то $p^{(1)}(t) = p_0^{(1)} \exp [-(\nu^{(12)} + \nu^{(21)})t] +$

$$+ \frac{\nu^{(12)}}{\nu^{(12)} + \nu^{(21)}} \{1 - \exp [-(\nu^{(12)} + \nu^{(21)})t]\}. \quad (6.46)$$

В установившемся режиме, если таковой имеет место, в системе при $t \rightarrow \infty$ вероятности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ принимают значения

$$p^{(1)} = \frac{v^{(12)}}{v^{(12)} + v^{(21)}}, \quad p^{(2)} = \frac{v^{(21)}}{v^{(12)} + v^{(21)}}. \quad (6.47)$$

Для вектора математического ожидания $\mathbf{m}^{(s)}$ и корреляционной матрицы $\Theta^{(s)}$ в гауссовском приближении в соответствии с (6.33) и (6.34) получим следующие уравнения:

$$\dot{\mathbf{m}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{m}^{(1)} - v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \mathbf{m}^{(1)} + v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \mathbf{m}^{(2)} + \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{u}, \quad (6.48)$$

$$\dot{\mathbf{m}}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{m}^{(2)} - v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \mathbf{m}^{(2)} + v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \mathbf{m}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{u};$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(1)} = & \mathbf{A}^{(1)}\Theta^{(1)} + \Theta^{(1)}\mathbf{A}^{(1)\tau} - v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \Theta^{(1)} + v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \Theta^{(2)} + \\ & + \mathbf{F}^{(1)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(1)\tau} + v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} (\mathbf{m}^{(2)} - \mathbf{m}^{(1)}) (\mathbf{m}^{(2)} - \mathbf{m}^{(1)})^{\tau}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(2)} = & \mathbf{A}^{(2)}\Theta^{(2)} + \Theta^{(2)}\mathbf{A}^{(2)\tau} - v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \Theta^{(2)} + v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \Theta^{(1)} + \\ & + \mathbf{F}^{(2)}\mathbf{G}\mathbf{F}^{(2)\tau} + v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (\mathbf{m}^{(1)} - \mathbf{m}^{(2)}) (\mathbf{m}^{(1)} - \mathbf{m}^{(2)})^{\tau}. \end{aligned}$$

Интегрирование этих уравнений следует производить при начальных условиях $\mathbf{m}_0^{(1)}, \mathbf{m}_0^{(2)}, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}$ совместно с уравнениями (6.43).

При исследовании мультиструктурной системы с распределенными переходами пуассоновского типа предварительно может быть оценена ее устойчивость в смысле Ляпунова по моментным характеристикам. Для оценки устойчивости по математическому ожиданию следует рассмотреть однородные уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}^{(1)} &= \left(\mathbf{A}^{(1)} - v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \right) \mathbf{m}^{(1)} + v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \mathbf{m}^{(2)}, \\ \dot{\mathbf{m}}^{(2)} &= \left(\mathbf{A}^{(2)} - v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \right) \mathbf{m}^{(2)} + v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \mathbf{m}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Если ввести объединенный вектор $\mathbf{m}$ размера $2n_y + 1$ и объединенные диагонально-блочные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$ размера $2n_y \times 2n_y$ вида

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \mathbf{m}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} & v^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \\ v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} & -v^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \end{bmatrix}.$$

то уравнения (6.50) можно переписать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{A} + \mathbf{H})\mathbf{m}. \quad (6.51)$$

Для оценки устойчивости уравнения (6.51) следует применить условие Рауса — Гурвица к характеристическому уравнению, полученному из (6.51) при «замораживании» коэффициентов матрицы $\mathbf{H}$, зависящих от $p^{(1)}(t)$ и $p^{(2)}(t)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda - A_{11} - H_{11} & -A_{12} - H_{12} & -A_{12n_y} - H_{12n_y} \\ -A_{21} - H_{21} & \lambda - H_{22} - H_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -A_{2n_y1} - H_{2n_y1} & -A_{2n_y2} - H_{2n_y2} & \dots \lambda - A_{2n_y2n_y} - H_{2n_y2n_y} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.52)$$

Для оценки устойчивости по корреляционной матрице следует рассмотреть однородные уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(1)} &= \mathbf{A}^{(1)}\Theta^{(1)} + \Theta^{(1)}\mathbf{A}^{(1)\tau} - \gamma^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \Theta^{(1)} + \gamma^{(12)} \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \Theta^{(2)}, \\ \dot{\Theta}^{(2)} &= \mathbf{A}^{(2)}\Theta^{(2)} + \Theta^{(2)}\mathbf{A}^{(2)\tau} - \gamma^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \Theta^{(2)} + \gamma^{(21)} \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \Theta^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Если ввести те же объединенные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$, а также матрицу $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta^{(1)} \\ \Theta^{(2)} \end{bmatrix}$ размера $2n_y \times 2n_y$, то уравнение (6.53) запишем в форме одного

$$\dot{\Theta} = \mathbf{A}\Theta + \Theta\mathbf{A}^\tau + \mathbf{H}\Theta. \quad (6.54)$$

Для оценки устойчивости уравнения (6.54) следует также применить условие Рауса — Гурвица к характеристическому уравнению, полученному из (6.54) при «замораживании» коэффициентов той же матрицы $\mathbf{H}$, зависящих от $p^{(1)}(t)$ и $p^{(2)}(t)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2A_{11} - H_{11} & -A_{12} - A_{21} - H_{12} & \dots & -A_{12n_y} - A_{2n_y1} - H_{12n_y} \\ -A_{21} - A_{12} - H_{21} & \lambda - 2A_{22} - H_{22} & \dots & -A_{22n_y} - A_{2n_y2} - H_{22n_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{2n_y1} - A_{12n_y} & -A_{2n_y2} - A_{22n_y} - H_{2n_y2} & \dots & \lambda - 2A_{2n_y2n_y} - H_{2n_y2n_y} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.55)$$

Пример 6.2. Динамическая система с пуассоновским нарушением и восстановлением описывается системой двух одномерных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A^{(1)}y + F\xi, \quad y(t_0) = y_0; \\ \dot{y} &= A^{(2)}y + F\xi, \quad y(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Интенсивности смены структуры $\gamma^{(12)} = \text{const}$, $\gamma^{(21)} = \text{const}$.

Уравнения для вероятностей состояний $p^{(1)}, p^{(2)}$ следующие:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -p^{(1)}v^{(21)} + p^{(2)}v^{(12)}, \quad p^{(1)}(t_0) = p_0^{(1)}, \\ \dot{p}^{(2)} &= -p^{(2)}v^{(12)} + p^{(1)}v^{(21)}, \quad p^{(2)}(t_0) = p_0^{(2)}.\end{aligned}$$

Уравнения для вероятностных моментов — математических ожиданий $m^{(1)}(t)$, $m^{(2)}(t)$ и дисперсий $\theta^{(1)}(t)$, $\theta^{(2)}(t)$ типа (6.48) и (6.49) — следующие:

$$\begin{aligned}\dot{m}^{(1)} &= A^{(1)}\bar{m}^{(1)} - v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}m^{(1)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}m^{(2)}, \quad \bar{m}^{(1)}(t_0) = m_0^{(1)}, \\ \dot{m}^{(2)} &= A^{(2)}m^{(2)} - v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}m^{(2)} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}m^{(1)}, \quad m^{(2)}(t_0) = m_0^{(2)}, \\ \dot{\theta}^{(1)} &= 2A^{(1)}\theta^{(1)} - v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) + v^{(12)}(m^{(2)} - m^{(1)})^2 + F^2G, \\ \dot{\theta}^{(2)} &= 2A^{(2)}\theta^{(2)} - v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) + v^{(21)}(m^{(1)} - m^{(2)})^2 + F^2G, \\ \theta^{(1)}(t_0) &= \theta_0^{(1)}, \quad \theta^{(2)}(t_0) = \theta_0^{(2)}.\end{aligned}$$

Для оценки устойчивости по математическому ожиданию составим характеристическое уравнение типа (6.52)

$$\left(\lambda - A^{(1)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\right)\left(\lambda - A^{(2)} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\right) - v^{(12)}v^{(21)} = 0.$$

Для того чтобы данная система была устойчива, необходимо согласно критерию Рауса — Гурвица выполнение условий

$$\begin{aligned}-A^{(1)} - A^{(2)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} &> 0, \\ -v^{(12)}v^{(21)} + \left(-A^{(1)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\right)\left(-A^{(2)} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\right) &> 0.\end{aligned}$$

Например, при $A^{(1)} = 1$, $A^{(2)} = 0$, $v^{(12)} = 0,1$, $v^{(21)} = 0,05$ эти условия всегда выполняются.

Для оценки устойчивости системы по дисперсии составим характеристическое уравнение типа (6.55)

$$\left(\lambda - 2A^{(1)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\right)\left(\lambda - 2A^{(2)} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\right) - v^{(12)}v^{(21)} = 0.$$

Для устойчивости системы по дисперсии необходимо согласно критерию Рауса — Гурвица выполнение условий

$$\begin{aligned}-2A^{(1)} - 2A^{(2)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} &> 0, \\ -v^{(12)}v^{(21)} + \left(-2A^{(1)} + v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\right)\left(-2A^{(2)} + v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\right) &> 0.\end{aligned}$$

При тех же данных из этих выражений следует, что условия всегда выполняются.

§ 6.7. Комбинированная система самонаведения

Рассмотрим две задачи управления полетом летательного аппарата с помощью комбинированной системы самонаведения со случайной структурой.

Первая задача состоит в совместном исследовании двух последовательных режимов: 1) неуправляемого полета, зависящего от случайных начальных условий и нормального ускорения цели

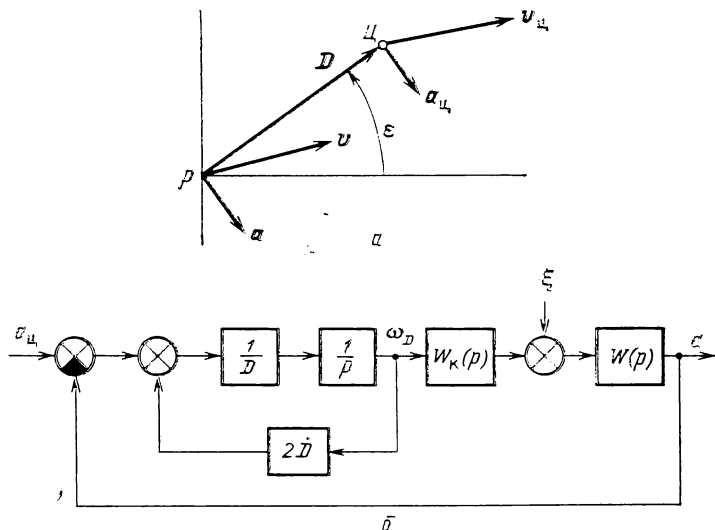


Рис. 6.7. Структурная схема системы самонаведения

$a_{ц}$, и 2) самонаведения под действием управляющего ускорения a (рис. 6.7, а), включаемого в случайный момент времени.

Вторая задача состоит в исследовании самонаведения со случайными неоднократными перерывами и восстановлением информации, поступающей в координатор цели.

Летательным аппаратом может быть самолет, ракета, космический аппарат [37, 38]. Структурная схема одного канала системы самонаведения представлена на рис. 6.7, б, что соответствует кинематической схеме самонаведения, приведенной на рис. 6.7, а. Уравнения этой системы самонаведения следующие [43]:

$$\begin{aligned} pD &= v_{ц} - v = -v_r, \\ p\omega_D &= \frac{2v_r}{D} \omega_D + \frac{a_{ц}}{D} - \frac{a}{D}, \\ a &= W(p) [W_K(p) \omega_D + \xi(t)], \end{aligned} \quad (6.56)$$

где $W(p)$ — передаточная функция летательного аппарата; $W_K(p)$ — передаточная функция координатора; $\omega_D = \dot{\epsilon}$ — угловая

скорость линии визирования; a , a_n — нормальные ускорения летательного аппарата и цели; $\xi(t)$ — случайная ошибка измерения типа белого шума с интенсивностью G .

Качество самонаведения характеризуется величиной промаха (пролета), текущее значение которого $h(t) = \frac{D^2(t)}{v_r} \omega_D$. При наличии помех эта величина является случайной. Поэтому качество системы самонаведения обычно оценивается величинами математического ожидания m_h и дисперсии D_h промаха. Для этого надо определить математическое ожидание m_{ω_D} и дисперсию D_{ω_D} .

При решении сформулированных задач предположим, что $v_n - v = \dot{D} = -v_r = \text{const}$. Тогда из первого уравнения (6.56)

$D(t) = D_0 + \dot{D}t = D_0 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)$, где $t_n = \frac{D_0}{v_r}$ — полное время наведения (шолета); D_0 — начальная дальность. Примем также координатор цели безынерционным, т. е. $W_K(p) = 1$, а передаточную функцию летательного аппарата $W(p) = k_0$. При высказанных предположениях уравнения (6.56) принимают вид

$$\dot{\omega}_D = -\frac{k_0 - 2v_r}{D} \omega_D + \frac{a_n}{D} - \frac{k_0}{D} \xi. \quad (6.57)$$

Перейдем к относительным величинам, для чего введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{t_n} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad k = \frac{k_0}{v_r}, \quad G_0 = G \frac{k^2}{t_n^2}, \quad b_n = a_n \frac{t_n}{D_0}.$$

Для безразмерного времени τ уравнение (6.57) следующее:

$$\dot{y} = -\frac{k-2}{1-\tau} y - \frac{b_n}{1-\tau} - \frac{\sqrt{G_0}}{1-\tau} \xi_0(\tau); \quad \omega_D(\tau) = y(\tau), \quad (6.58)$$

где $\xi_0(\tau)$ — белый шум с единичной интенсивностью.

Текущее значение промаха принимает форму

$$h(\tau) = y(\tau) (1 - \tau)^2. \quad (6.59)$$

Первая задача. После старта летательный аппарат движется некоторое случайное время неуправляемым (режим неуправляемого полета). На структурной схеме (см. рис. 6.7, б) этот режим можно учесть, положив $W(p) = k_0 = 0$ или приняв в уравнении (6.58) $k = 0$, т. е. контур управления размыкается. Изменение $y(\tau)$ в этом режиме будет происходить только под влиянием a_n (будем считать регулярной функцией) и начального условия. В некоторый случайный момент $\tau \leq 1$ начинается режим самонаведения, т. е. контур управления замыкается: $k_0 \neq 0$. Момент перехода системы из первого режима во второй будем считать пуассоновским процессом с интенсивностью перехода $\gamma^{(21)}(\tau) = \gamma = \text{const}$. Обратного перехода нет, т. е. $\gamma^{(12)} = 0$.

Уравнение (6.58) перепишем в виде

$$\dot{y} = -A^{(s)}y - \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} - G^{(s)}\xi_0(\tau) \quad (s=1,2), \quad (6.60)$$

где

$$A^{(s)} = \begin{cases} \frac{-2}{1-\tau} & (s=1), \\ \frac{k-2}{1-\tau} & (s=2); \end{cases} \quad G^{(s)} = \begin{cases} 0 & (s=1), \\ \frac{\sqrt{G_0}}{1-\tau} & (s=2). \end{cases}$$

Уравнения Колмогорова (6.43) для вероятностей состояний в данной задаче следующие:

$$\dot{p}^{(1)} = -p^{(1)}v, \quad p^{(1)}(0) = 1, \quad \dot{p}^{(2)} = vp^{(1)}, \quad p^{(2)}(0) = 0. \quad (6.61)$$

Решение уравнений (6.61) таково:

$$p^{(1)}(\tau) = e^{-v\tau}, \quad p^{(2)}(\tau) = 1 - e^{-v\tau}. \quad (6.62)$$

Составим уравнения типа (6.48) и (6.49) для математического ожидания $m^{(s)}$ и дисперсии $\theta^{(s)}$ в каждом состоянии:

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(1)} &= 2\frac{1}{1-\tau}m^{(1)} + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau}, \quad m^{(1)}(0) = m_0, \\ \dot{m}^{(2)} &= -\frac{k-2}{1-\tau}m^{(2)} + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} + v\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}(m^{(1)} - m^{(2)}), \quad m^{(2)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Математическое ожидание процесса $y(\tau)$ с учетом обоих режимов функционирования системы

$$m = m^{(1)}p^{(1)} + m^{(2)}p^{(2)}.$$

Решение уравнений (6.63) с учетом (6.62) при $b_{\Pi} = \text{const}$ для m имеет вид

$$\begin{aligned} m(\tau) &= m_0 \left[(1-\tau)ve^{-v} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x(2-\frac{1}{2}\alpha)} dx + (1-\tau)^{-2}e^{-v\tau} \right] + \\ &+ b_{\Pi} \left\{ \frac{2}{\alpha} \left[1 - (1-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} - (1-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}e^{-v\tau} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x(2+\frac{\alpha}{2})} dx \right] + \right. \\ &+ (1-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{ve^{-v}}{2} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x(2+\frac{\alpha}{2})} dx - \\ &\left. - (1-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{v}{2} e^{-v} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x^2} dx + \frac{1}{2}(1-\tau)^2 e^{-v\tau} - \frac{1}{2}e^{-v\tau} \right\}, \quad (6.64) \end{aligned}$$

где m_0 — начальное значение математического ожидания процесса $y(\tau)$; $\alpha = 2(k-2)$.

Математическое ожидание текущего промаха в соответствии с (6.59) равно

$$m_h(\tau) = m(\tau)(1-\tau)^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (6.65)$$

Эта величина равна нулю при $m_0 = 0$ и неманеврирующей цели, когда $b_n = 0$.

Воспользовавшись (6.49), запишем уравнения для дисперсии $\theta^{(s)}$ в каждом состоянии:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^{(1)} &= \frac{4}{1-\tau} \theta^{(1)}, \quad \theta^{(1)}(0) = \theta_0, \\ \dot{\theta}^{(2)} &= -2 \frac{k-2}{1-\tau} \theta^{(2)} + v \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) + v \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (m^{(1)} - m^{(2)}) + \\ &\quad + G_0 \frac{1}{(1-\tau)^2}, \quad \theta^{(2)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Дисперсия переменной $y^0(\tau)$ с учетом обоих режимов равна

$$\theta = (\theta^{(1)} + m^{(1)2}) p^{(1)} + (\theta^{(2)} + m^{(2)2}) p^{(2)} - m^2,$$

Решение уравнений (6.66) с учетом (6.62) для $\theta(\tau)$ при $m(\tau) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= \theta_0 \left[(1-\tau)^{-3} e^{-v\tau} + (1-\tau)^{\alpha} v e^{-v} \int_{1-\tau}^{\tau} \frac{e^{vx}}{x^{\alpha+1}} dx \right] + \\ &\quad + G_0 \left[(1-\tau)^{-1} \frac{1 - (1-\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (1-\tau)^{\alpha} e^{-v} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x^{\alpha+2}} dx \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Дисперсия промаха, принимая во внимание (6.59), вычисляется по формуле

$$\theta_h = \theta(\tau)(1-\tau)^4, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (6.68)$$

Величина интенсивности v скачкообразного перехода из режима неуправляемого полета на самонаведение в соответствии с § 4.10 определяется через $\tau_{\text{ср}}$ — среднее относительное время неуправляемого полета: $v = 1/\tau_{\text{ср}}$. Подставляя (6.67) в формулу (6.68), получаем

$$\begin{aligned} \theta_h(\tau) &= \theta_0 \left[e^{-v\tau} + (1-\tau)^{\alpha+4} v e^{-v} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x^{\alpha+4}} dx \right] + \\ &\quad + G_0 \left[(1-\tau)^3 \frac{1 - (1-\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (1-\tau)^{\alpha+4} e^{-v} \int_{1-\tau}^1 \frac{e^{vx}}{x^{\alpha+4}} dx \right] = \theta_1(\tau) + \theta_2(\tau). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Первое слагаемое в (6.69) зависит от θ_0 , второе — от G_0 . Удобно оценить точность наведения двумя относительными функциями

$$\sigma_1(\tau) = \sqrt{\frac{\theta_1(\tau)}{\theta_0}}, \quad \sigma_2(\tau) = \sqrt{\frac{\theta_2(\tau)}{G_0}}. \quad (6.70)$$

На рис. 6.8 изображены графики, характеризующие точность самонаведения летательного аппарата в момент относительного времени $\tau=0,95$, т. е. за 5 % времени до конца наведения, в функции $\tau_{ср}$. Расчеты выполнены при $k=3$ и $k=4$ [4]. Так как $\tau_{ср}$ характеризует длительность неуправляемого полета, то

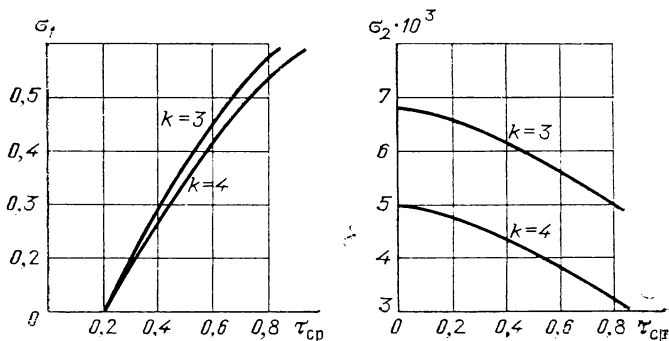


Рис. 6.8. Точность комбинированной системы самонаведения

приведенные графики позволяют сделать вывод об изменении промаха за счет этого участка полета. В частности, с ростом $\tau_{ср}$ промах за счет ненулевых начальных условий возрастает, а за счет помех уменьшается.

Рассмотрим теперь два других противоположных режима самонаведения. Предположим, что в момент $t=0$ начинается самонаведение летательного аппарата, а в случайный момент $t < t_a$ происходит срыв слежения за целью в координаторе системы, и в дальнейшем аппарат движется, как неуправляемый, но под действием возмущений. На рис. 6.10 срыв слежения представлен переключателем П, разрывающим цепь слежения.

Обратимся к уравнению (6.60), но коэффициенты $A^{(s)}$ и $G^{(s)}$ теперь будут другими:

$$A^{(s)} = \begin{cases} \frac{k-2}{1-\tau} & (s=1), \\ -\frac{2}{1-\tau} & (s=2); \end{cases} \quad G^{(s)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{G_0}}{1-\tau} & (s=1), \\ 0 & (s=2). \end{cases} \quad (6.71)$$

Скачкообразный срыв слежения будем считать также пуассоновским с интенсивностью ν . Уравнения для вероятностей состояний будут те же (6.61), а функции $p^{(1)}(\tau)$ и $p^{(2)}(\tau)$ примут вид (6.62).

Используя (6.48) и (6.49), составим уравнения для математических ожиданий

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(1)} &= -\frac{k-2}{1-\tau} m^{(1)} + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau}, \quad m^{(1)}(0) = m_0, \\ \dot{m}^{(2)} &= \frac{2}{1-\tau} m^{(2)} - \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} + v \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (m^{(1)} - m^{(2)}), \quad m^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

и уравнения для дисперсий $\theta^{(1)}(\tau)$, $\theta^{(2)}(\tau)$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^{(1)} &= -2 \frac{k-2}{1-\tau} \theta^{(1)} + \frac{V\bar{G}_0}{(1-\tau)^2}, \quad \theta^{(1)}(0) = \theta_0, \\ \dot{\theta}^{(2)} &= \frac{4}{1-\tau} \theta^{(2)} + v \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) + v \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (m^{(1)} - m^{(2)})^2 + \frac{V\bar{G}_0}{(1-\tau)^2}, \\ \theta^{(2)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Для случая, когда $m_0 = 0$, $b_{\Pi} = 0$, т. е. $m^{(1)} = 0$, $m^{(2)} = 0$, безусловная дисперсия $\theta(\tau) = \theta^{(1)}(\tau)p^{(1)}(\tau) + \theta^{(2)}(\tau)p^{(2)}(\tau)$. Решение уравнений (6.73) с учетом (6.62) для $\theta(\tau)$ при $m(\tau) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= \theta_0 \left[(1-\tau)^{\alpha} e^{-v\tau} + (1-\tau)^{-4} v e^{-v} \int_{1-\tau}^1 x^{\alpha+4} e^{vx} dx \right] + \\ &+ G_0 \left\{ (1-\tau)^{\alpha} e^{-v\tau} \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1-(1-\tau)^{\alpha+1}}{(1-\tau)^{\alpha+1}} \right] + (1-\tau)^{-4} \left[\frac{1-(1-\tau)^3}{3} \right] - \right. \\ &- (1-\tau)^{-4} e^v \int_{1-\tau}^1 x^2 e^{vx} dx + \frac{(1-\tau)^{-4}}{1+\alpha} v e^v \int_{1-\tau}^{\tau} x^3 e^{vx} dx - \\ &\left. - \frac{(1-\tau)^{-4}}{1+\alpha} v e^{-v} \int_{1-\tau}^1 x^{\alpha+4} e^{vx} dx \right\}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

где $\alpha = 2(k-2)$. Подставляя (6.74) в формулу (6.68) получаем

$$\begin{aligned} \theta_h(\tau) &= \theta_0 \left[(1-\tau)^{\alpha+4} e^{-v\tau} + v e^{-v} \int_{1-\tau}^1 x^{\alpha+4} e^{vx} dx \right] + \\ &+ G_0 \left\{ (1-\tau)^{\alpha+4} e^{-v\tau} \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1-(1-\tau)^{\alpha+1}}{(1-\tau)^{\alpha+1}} \right] + \left[\frac{1-(1-\tau)^3}{3} \right] - \right. \\ &- e^{-v} \int_{1-\tau}^1 x^2 e^{vx} dx + \frac{v}{1+\alpha} e^{-v} \int_{1-\tau}^1 x^3 e^{vx} dx - \frac{v}{1+\alpha} e^v \int_{1-\tau}^1 x^{\alpha+4} e^{vx} dx \left. \right\} = \\ &= \theta_1^*(\tau) + \theta_2^*(\tau). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Первое слагаемое зависит от θ_0 , второе — от G_0 . На рис. 6.9 изображены графики функций $\sigma_1^*(\tau) = \sqrt{\frac{\theta_1^*(\tau)}{\theta_0}}$ и $\sigma_2^*(\tau) = \sqrt{\frac{\theta_2^*(\tau)}{G_0}}$ в функции $\tau_{\text{ср}}$ — среднего относительного времени до начала срыва самонаведения. По этим графикам можно оценить

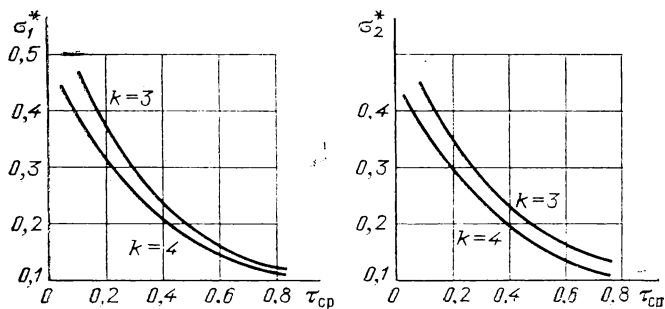


Рис. 6.9. Точность комбинированной системы самонаведения

влияние срыва слежения в координаторе на увеличение промаха самонаведения.

Вторая задача. Самонаведение летательного аппарата на цель при кратковременных случайных скачкообразных перерывах слежения в координаторе. Структурная схема системы самонаведения изображена на рис. 6.10, где перерывы слежения (поступления информации) реализованы с помощью выключения и

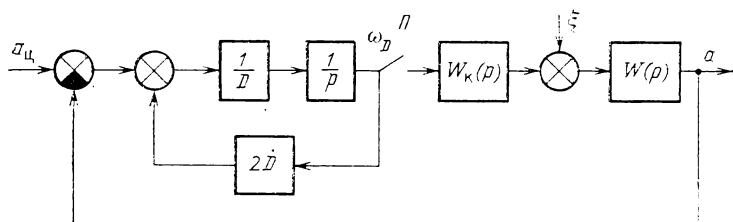


Рис. 6.10. Структурная схема системы самонаведения с перерывами информации

включения переключателя П. Предположим, что перерывы информации являются пуассоновскими с интенсивностями $\gamma^{(21)}(t)$ и $\gamma^{(12)}(t)$, где индексом 1 отмечено состояние замкнутой системы, а индексом 2 — разомкнутой.

Уравнения процесса самонаведения при тех же предположениях $W_k(p)=1$, $W(p)=k_0$ после перехода к безразмерному

времени имеют вид

$$\dot{y} = A^{(s)}y + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} + \frac{\sqrt{G_0}}{1-\tau} \xi(\tau), \quad y(0) = y_0,$$

$$A^{(s)} = \begin{cases} -\frac{k-2}{1-\tau} & (s=1), \\ \frac{2}{1-\tau} & (s=2). \end{cases} \quad (6.76)$$

Исследуем зависимость математического ожидания и дисперсии промаха от величин интенсивностей скачкообразных переходов при заданных $b_{\Pi} = \text{const}$ и $G_0 = \text{const}$.

Уравнения Колмогорова (6.43) при $v^{(12)} = \text{const}$ и $v^{(21)} = \text{const}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(1)} &= -v^{(21)}p^{(1)} + v^{(12)}p^{(2)}, \quad p^{(1)}(0) = p_0^{(1)}, \\ \dot{p}^{(2)} &= -v^{(12)}p^{(2)} + v^{(21)}p^{(1)}, \quad p^{(2)}(0) = p_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Уравнения для математических ожиданий $m^{(1)}(\tau)$, $m^{(2)}(\tau)$, составленные в соответствии с (6.48), следующие:

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(1)} &= -\frac{k-2}{1-\tau}m^{(1)} + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} - v^{(12)}\frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}(\bar{m}^{(1)} - m^{(2)}), \\ \dot{m}^{(2)} &= \frac{2}{1-\tau}m^{(2)} + \frac{b_{\Pi}}{1-\tau} - v^{(21)}\frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}(m^{(2)} - m^{(1)}), \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$m^{(1)}(0) = m_0^{(1)}, \quad m^{(2)}(0) = m_0^{(2)}.$$

Результаты численного решения уравнений (6.77) и (6.78) при $v^{(12)} = v^{(21)} = v$, $\tau = 0,95$, $k=3$, различных v и вариантах

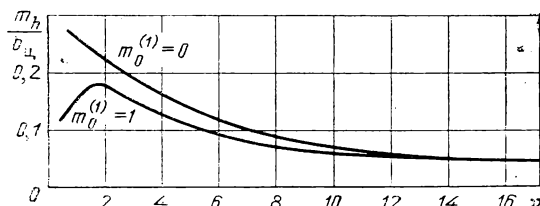


Рис. 6.11. Точность самонаведения с перерывами информации (влияние v)

начальных условий $p^{(1)} = 0$ и $p_0^{(1)} = 1$ ($p_0^{(2)} = 1$ и $p_0^{(2)} = 0$) и $m_0^{(1)} = m_0^{(2)} = 0$ приведены на рис. 6.11 для математического ожидания относительного промаха

$$\frac{m_h(\tau)}{b_{\Pi}} = \frac{m^{(1)}(\tau)p^{(1)}(\tau) + m^{(2)}(\tau)p^{(2)}(\tau)}{b_{\Pi}} (1-\tau)^2. \quad (6.79)$$

Уравнения для дисперсий $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$, составленные на основании (6.49), при $k=3$ и $\nu^{(12)} = \nu^{(21)} = \nu$ следующие:

$$\dot{\theta}^{(1)} = -2 \frac{k-2}{1-\tau} \theta^{(1)} + \frac{G_0}{(1-\tau)} - \nu \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}), \quad \theta^{(1)}(0) = \theta_0^{(1)}, \quad (6.80)$$

$$\dot{\theta}^{(2)} = \frac{4}{1-\tau} \theta^{(2)} + \frac{G_0}{(1-\tau)^2} - \nu \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)}), \quad \theta^{(2)}(0) = \theta_0^{(2)}.$$

На рис. 6.12 приведены результаты численного интегрирования уравнений (6.80) при $k=3$, $\nu^{(12)} = \nu^{(21)} = \nu$, $\tau=0,95$,

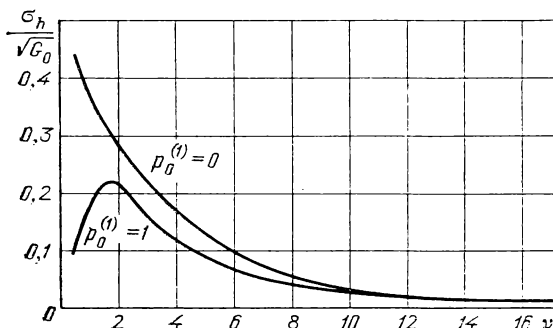


Рис. 6.12. Точность самонаведения с перерывами информации (влияние помехи)

$\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(2)} = 0$ в зависимости от ν , $p_0^{(1)} = 0$ и $p_0^{(1)} = 1$ для относительного среднеквадратического значения промаха

$$\frac{\sigma_h}{\sqrt{G_0}} = \sqrt{\frac{\theta^{(1)} p^{(1)} + \theta^{(2)} p^{(2)}}{G_0}} (1-\tau)^2. \quad (6.81)$$

Увеличение ν соответствует уменьшению среднего времени $\tau_{ср}$ прерывания информации, т. е. приближению к системе без прерывов информации (одноструктурная система).

СИСТЕМЫ С УСЛОВНОЙ МАРКОВСКОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 7.1. Статистическая зависимость структуры от фазовых координат

В § 5.1 рассматривалась классификация внешних случайных скачкообразных воздействий, которые можно представить как изменения марковской структуры.

Марковская структура, напомним, не зависит от фазовых координат системы. Как отмечалось в § 5.1, эти внешние воздействия можно разделить на входные, параметрические и функциональные. Однако мы приняли, что из физических соображений более удобно к внешним воздействиям отнести лишь входные (аддитивные) воздействия, а остальные трактовать как изменения внутреннего характера, не зависящие, впрочем, от фазовых координат.

На самом деле, более распространенным на практике случаем является зависимость структуры от фазовых координат. Эта зависимость может быть *детерминированной* или *случайной*. Детерминированную зависимость имеют так называемые системы с *переменной структурой* [20]. Если в системе с переменной структурой протекают случайные процессы, вызванные случайными возмущениями или случайными начальными условиями, то в этой системе могут происходить изменения структуры в случайные моменты времени при достижении фазовыми координатами определенных значений или границ. По терминологии, принятой в § 2.1, эти изменения называются *сосредоточенными переходами*.

Детерминированную зависимость можно рассматривать как вырожденный случай — упрощенную модель случайной зависимости. А система с переменной структурой представляется тогда как частный случай системы со случайной структурой.

Наиболее общим классом этих систем, рассматриваемым в данной книге, являются системы с *условной марковской структурой*. Их математическое описание и основные свойства даны в § 4.3.

Согласно данному там определению, *интенсивности* $v^{(sr)}(x, t)$ и вероятности переходов $q^{(sr)}(y, k+1, k)$ зависят от значения вектора фазовых координат y в текущий момент времени.

Такое математическое описание отражает тот факт, что параметрические и функциональные случайные скачкообразные воз-

действия в отличие от входных воздействий изменяют свои вероятностные характеристики в зависимости от значений фазовых координат для большинства реальных технических систем и физических явлений.

В системах с переменной структурой переходы из одного состояния структуры в другое происходят при достижении детерминированных границ фазовыми координатами. Условная марковская структура лучше учитывает тот факт, что в реальных системах эти границы очень часто являются случайными.

Эти обстоятельства вызывают необходимость более детального рассмотрения некоторых особенностей протекания случайных скачкообразных процессов в системах с условной марковской структурой.

Напомним, что в настоящей книге в основу приближенных методов анализа положена *двухмоментная параметрическая аппроксимация*. Точность этих методов зависит от того, насколько аппроксимирующая условная плотность вероятности $f^{(s)}(y, t)$ близка по форме к истинной плотности.

Как показано в § 5.4, распределение случайного двоичного сигнала, сглаженного апериодическим звеном, подчиняется закону Пирсона I типа. Этот важный с практической точки зрения результат приводит к мысли о том, что в качестве аппроксимирующей плотности целесообразно шире использовать плотность распределения Пирсона I типа.

В приближенных методах анализа динамических систем с детерминированной структурой обычно используется гауссовская аппроксимация неизвестных плотностей распределения. Это объясняется эффектом нормализации распределений в результате сглаживания случайных негауссовских процессов. Математическим обоснованием эффекта нормализации служит центральная предельная теорема теории вероятности [36].

Однако в системах со случайными изменениями структуры и, в частности, при сглаживании случайного двоичного сигнала условия центральной предельной теоремы могут быть существенно нарушены. Этим объясняется имеющееся значительное отклонение законов распределения от нормального.

Тем более есть основания ожидать, что подобные отклонения будут наблюдаться в системах с условной марковской структурой, где переходы из одного состояния в другое неоднородны по области изменения фазовых координат.

Для изучения этих явлений стоит рассмотреть задачу, достаточно простую, чтобы получить аналитическое решение для законов распределения, и вместе с тем отражающую основные особенности динамических систем с условной марковской структурой: скачкообразный характер случайных процессов, статистическую зависимость переходов от значений переменных и сглаживание процессов инерционными звеньями.

Такая задача рассматривается в следующем параграфе.

§ 7.2. Закон распределения выходного сигнала нелинейной системы с условной марковской структурой

Рассмотрим непрерывную систему первого порядка, описываемую уравнением

$$\dot{y} = \varphi^{(s)}(y, t) \quad (s = 1, 2, 3), \quad (7.1)$$

где $s(t)$ — непрерывная условная марковская цепь с тремя состояниями, заданная условными интенсивностями переходов $v^{(sr)}(y)$; в третьем состоянии структуры система нейтральна: $\varphi^{(3)}(y, t) \equiv 0$.

Найдем условные (при фиксированных состояниях структуры) и безусловный законы распределения выходного сигнала $y(t)$ в установившемся режиме. В предположении, что стационарное (установившееся) распределение существует, на основании уравнений (3.72) при $t \rightarrow \infty$ запишем уравнения для $f(y, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [\varphi^{(1)}(y) f(y, 1)] - [v^{(21)}(y) + v^{(31)}(y)] f(y, 1) + \\ + v^{(12)}(y) f(y, 2) + v^{(13)}(y) f(y, 3) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} [\varphi^{(2)}(y) f(y, 2)] - [v^{(12)}(y) + v^{(32)}(y)] f(y, 2) + \\ + v^{(23)}(y) f(y, 3) + v^{(21)}(y) f(y, 1) = 0, \quad (7.2) \\ - [v^{(13)}(y) + v^{(23)}(y)] f(y, 3) + v^{(31)}(y) f(y, 1) + v^{(32)}(y) f(y, 2) = 0. \end{aligned}$$

Исключая из системы уравнений (7.2) переменные $f(y, 2)$ и $f(y, 3)$, получаем дифференциальное уравнение для $f(y, 1)$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial y} [\varphi^{(1)}(y) f(y, 1)] + \left\{ \varphi^{(2)}(y) [v^{(31)}(y) + 2v^{(21)}(y)] + \right. \\ \left. + \varphi^{(1)}(y) [v^{(32)}(y) + 2v^{(12)}(y)] + \right. \\ \left. + \frac{[v^{(13)}(y) - v^{(23)}(y)] [\varphi^{(2)}(y) v^{(31)}(y) - \varphi^{(1)}(y) v^{(32)}(y)]}{v^{(13)}(y) + v^{(23)}(y)} \right\} \frac{f(y, 1)}{\varphi^{(2)}(y)} = 0 \quad (7.3) \end{aligned}$$

и алгебраические уравнения для $f(y, 2)$, $f(y, 3)$

$$\begin{aligned} f(y, 2) &= - \frac{\varphi^{(1)}(y)}{\varphi^{(2)}(y)} f(y, 1), \\ f(y, 3) &= \frac{\varphi^{(2)}(y) v^{(31)}(y) - \varphi^{(1)}(y) v^{(32)}(y)}{[v^{(13)}(y) + v^{(23)}(y)] \varphi^{(2)}(y)} f(y, 1). \quad (7.4) \end{aligned}$$

Обозначив $x(y) \triangleq \varphi^{(1)}(y) f(y, 1)$, перепишем уравнение (7.3) в виде

$$\frac{\partial x}{\partial y} + F(y) x(y) = 0, \quad (7.5)$$

где

$$F(y) = \frac{1}{2\varphi^{(1)}(y)\varphi^{(2)}(y)} \left\{ [\nu^{(31)}(y) + 2\nu^{(21)}(y)]\varphi^{(2)}(y) + \right. \\ \left. + [\nu^{(32)}(y) + 2\nu^{(12)}(y)]\varphi^{(1)}(y) + \right. \\ \left. + \frac{[\nu^{(13)}(y) - \nu^{(23)}(y)][\nu^{(31)}(y)\varphi^{(2)}(y) - \nu^{(32)}(y)\varphi^{(1)}(y)]}{\nu^{(13)}(y) + \nu^{(23)}(y)} \right\}. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.5) решается в квадратурах:

$$x(y) = c_1 \exp \left[- \int F(y) dy \right]. \quad (7.7)$$

Стационарная плотность вероятности $f(y, 1)$ может существовать не во всей области $[-\infty, \infty]$, а лишь в ее части $\mathcal{U}$, и определяется формулой

$$f(y, 1) = \begin{cases} \frac{c_0}{\varphi^{(1)}(y)} \exp \left[- \int F(y) dy \right], & y \in \mathcal{U}, \\ 0, & y \in \overline{\mathcal{U}}, \end{cases} \quad (7.8)$$

где c_0 — неопределенная постоянная.

Стационарные плотности вероятности $f(y, 2)$ и $f(y, 3)$ на основании соотношений (7.4) определяются формулами

$$f(y, 2) = \begin{cases} -\frac{c_0}{\varphi^{(2)}(y)} \exp \left[- \int F(y) dy \right], & y \in \mathcal{U}, \\ 0, & y \in \overline{\mathcal{U}}, \end{cases}$$

$$f(y, 3) = \begin{cases} c_0 \frac{\nu^{(31)}(y)\varphi^{(2)}(y) - \nu^{(32)}(y)\varphi^{(1)}(y)}{[\nu^{(13)}(y) + \nu^{(23)}(y)]\varphi^{(1)}(y)\varphi^{(2)}(y)} e^{-\int F(y) dy}, & y \in \mathcal{U}, \\ 0, & y \in \overline{\mathcal{U}}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Условные стационарные плотности вероятности находятся из выражений

$$f^{(s)}(y) = f(y, s)/p^{(s)}, \quad p^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, s) dy \quad (s = 1, 2, 3), \quad (7.10)$$

а безусловная стационарная плотность вероятности $f(y)$ на основании соотношения $f(y) = f(y, 1) + f(y, 2) + f(y, 3)$ определяется формулой

$$f(y) = c_0 \{ [\nu^{(31)}(y) + \nu^{(13)}(y) + \nu^{(23)}(y)]\varphi^{(2)}(y) - \\ - [\nu^{(32)}(y) + \nu^{(13)}(y) + \nu^{(23)}(y)]\varphi^{(1)}(y) \} \times \\ \times \{ [\nu^{(13)}(y) + \nu^{(23)}(y)\varphi^{(1)}(y)\varphi^{(2)}(y)]^{-1} \exp \left[- \int F(y) dy \right]. \quad (7.11)$$

Неопределенная постоянная c_3 находится из условия нормировки плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1. \quad (7.12)$$

Если интеграл (7.12) существует и при этом $f(y) \geq 0$, то стационарное распределение существует (т. е. при $t \rightarrow \infty$ система находится в установившемся режиме).

Как видно из условий и решения рассмотренной задачи, в ее рамки укладывается немало прикладных задач анализа систем, упрощенные модели которых могут быть представлены в виде одномерной стационарной нелинейной системы с тремя возможными состояниями структуры, в одном из которых система нейтральна. При этом вид нелинейностей и интенсивностей переходов, зависящих от выходного сигнала, ограничивается лишь условием существования стационарного (установившегося) распределения выходного сигнала. Одна из таких задач рассматривается в следующем параграфе.

§ 7.3. Сглаживание случайного двоичного сигнала нелинейным инерционным фильтром

7.3.1. Интенсивности переходов состояний структуры. Внесем ряд изменений в условия задачи, рассмотренной в § 5.4. Дополним следящую систему, изображенную на рис. 5.6, нелинейной

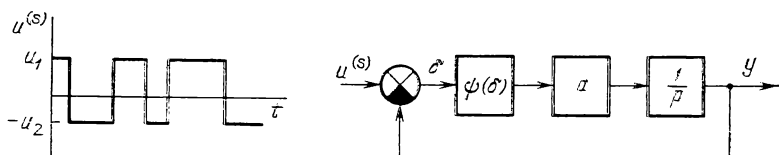


Рис. 7.1. Действие случайного двоичного сигнала на нелинейную следящую систему со случайной пеленгационной характеристикой

пеленгационной характеристикой со случайными границами (рис. 7.1, 7.2).

Как видно из рис. 7.2, структура пеленгационной характеристики имеет два возможных состояния: $\psi(\delta) = \delta$ и $\psi(\delta) = 0$. Изменения структуры случайны и характеризуются вероятностями переходов

$$p[\psi(t + \Delta t) = 0 | \psi(t) = \delta(t), \delta(t)] = \lambda^{(21)}(\delta) \Delta t = \begin{cases} 0, & -\delta_2 < \delta < \delta_1, \\ \lambda_1 \Delta t, & \delta_1 < \delta < \varepsilon_1, \quad -\varepsilon_2 < \delta < -\delta_2, \\ \lambda_2 \Delta t, & \delta \geq \delta_1, \quad \delta \leq -\varepsilon_2, \end{cases}$$

$$\lambda_2 > \lambda_1, \quad (7.13)$$

$$p[\psi(t + \Delta t) = \delta(t + \Delta t) | \psi(t) = 0, \delta_1^*(t)] = \lambda^{(12)}(\delta) \Delta t =$$

$$= \begin{cases} \omega_2 \Delta t, & -\delta_2 < \delta < \delta_1, \\ \omega_1 \Delta t, & \delta_1 < \delta < \varepsilon_1, \quad -\varepsilon_2 < \delta < -\delta_2, \\ 0, & \delta \leq -\varepsilon_2, \quad \delta \geq \varepsilon_1, \end{cases}$$

$$\omega_2 > \omega_1,$$

где Δt — малый промежуток времени.

Вероятности двух и более переходов из одного состояния в другое за время Δt — величины большего порядка малости, чем Δt . Интенсивности $\lambda^{(sr)}$ изображены на рис. 7.3.

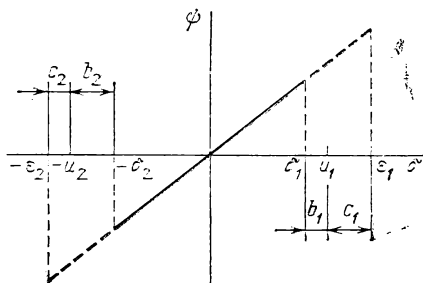


Рис. 7.2. Пеленгационная характеристика со случайными границами

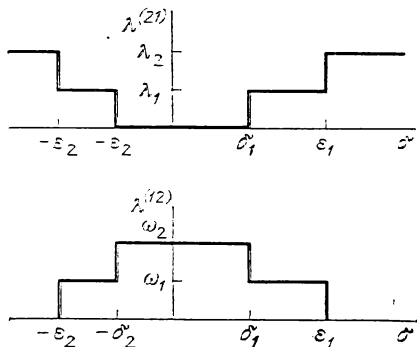


Рис. 7.3. Интенсивности срыва и восстановления слежения

Иными словами, структура пеленгационной характеристики описывается условной непрерывной марковской цепью с интенсивностями $\lambda^{(sr)}(\delta)$ ($s, r = 1, 2; s \neq r$), заданными выражениями (7.13).

Данная модель пеленгационной характеристики неплохо отражает сущность физических процессов, протекающих в следящих системах с возможными чередующимися срывами и восстановлениями связи. Она является одной из возможных моделей наряду с широко распространенной моделью мгновенного захвата и срыва сигнала при достижении им детерминированных границ.

Входной случайный двоичный сигнал $u^{(s)}$ представляет собой непрерывную марковскую однородную цепь с состояниями u_1 и $-u_2$, заданную интенсивностями переходов ν_1 и ν_2 .

Структура системы имеет четыре возможных состояния, образующих полную группу несовместных событий:

- 1) $u^{(1)} = u_1, \quad \psi^{(1)} = \delta;$
- 2) $u^{(2)} = -u_2, \quad \psi^{(2)} = \delta;$
- 3) $u^{(3)} = u_1, \quad \psi^{(3)} = 0;$
- 4) $u^{(4)} = -u_2, \quad \psi^{(4)} = 0.$

Для того чтобы воспользоваться результатами предыдущего параграфа, преобразуем это множество состояний к другому, состоящему из трех состояний. Объединив третье и четвертое

состояния, получим структуру, содержащую три состояния:

$$s = 1: u^{(1)} = u_1, \quad \psi^{(1)} = \delta;$$

$$s = 2: u^{(1)} = -u_2, \quad \psi^{(2)} = \delta;$$

$$s = 3: \psi^{(3)} = 0.$$

Найдем интенсивности переходов для преобразованной структуры. Согласно результатам § 4.9 эти интенсивности определяются по

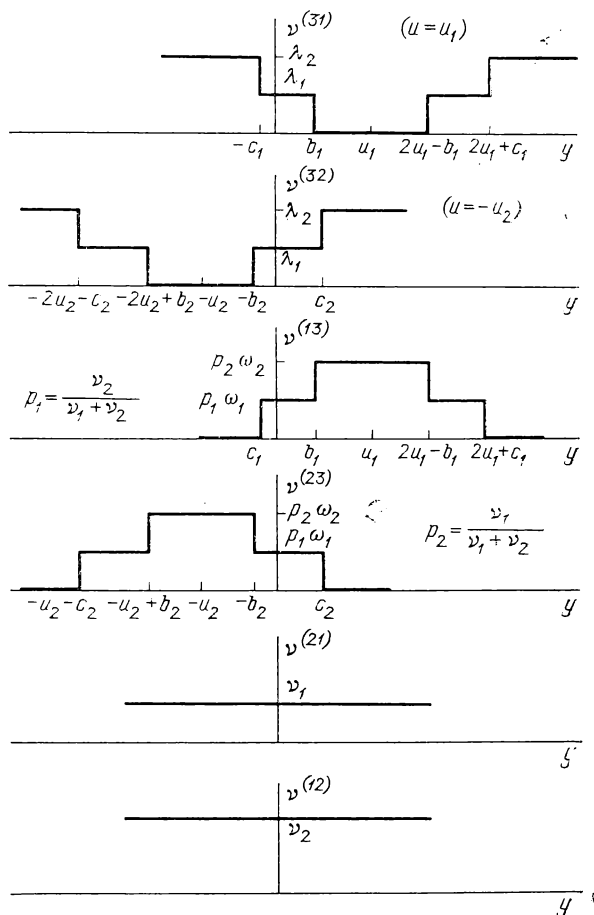


Рис. 7.4. Интенсивности переходов преобразованной структуры

формулам (4.71), (4.72) и в нашем случае принимают вид (рис. 7.4)

$$v^{(21)}(y, t) = v_1, \quad v^{(12)}(y, t) = v_2,$$

$$v^{(31)}(y, t) = \begin{cases} \lambda_2, & y \leq -c_1, \quad y \geq 2u_1 + c_1, \\ \lambda_1, & -c_1 < y < b_1, \quad 2u_1 - b_1 < y < 2u_1 + c_1, \\ 0, & b_1 < y < 2u_1 - b_1, \end{cases}$$

$$v^{(32)}(y, t) = \begin{cases} \lambda_2, & y \leq -2u_2 - c_2, \quad y \geq c_2, \\ \lambda_1, & -2u_2 - c_2 < y < -2u_2 + b_2, \quad -b_2 < y < c_2, \\ 0, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2, \end{cases} \quad (7.14)$$

$$v^{(13)}(y, t) = \begin{cases} \frac{\omega_2 v_2}{v_1 + v_2}, & b_1 < y < 2u_1 - b_1, \\ \frac{\omega_1 v_2}{v_1 + v_2}, & -c_1 < y < b_1, \quad 2u_1 - b_1 < y < 2u_1 + c_1, \\ 0, & y \leq -c_1, \quad y \geq 2u_1 + c_1, \end{cases}$$

$$v^{(23)}(y, t) = \begin{cases} \frac{\omega_2 v_1}{v_1 + v_2}, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2, \\ \frac{\omega_1 v_1}{v_1 + v_2}, & -b_2 < y < c_2, \quad -2u_2 - c_2 < y < -2u_2 + b_2, \\ 0, & y \leq -2u_2 - c_2, \quad y \geq c_2, \end{cases}$$

где

$$c_1 \triangleq \varepsilon_1 - u_1; \quad b_1 \triangleq u_1 - \delta_1;$$

$$c_2 \triangleq \varepsilon_2 - u_2; \quad b_2 \triangleq u_2 - \delta_1.$$

7.3.2. Стационарное распределение выходного сигнала. В соответствии с полученными тремя состояниями структуры уравнение системы можно записать в виде

$$\dot{y} = a^{(s)}(-y + u^{(s)}) \quad (s = 1, 2, 3), \quad (7.15)$$

где

$$a^{(1)} = a; \quad u^{(1)} = u_1;$$

$$a^{(2)} = a; \quad u^{(2)} = -u_2;$$

$$a^{(3)} = 0; \quad u^{(3)} = u_1 \cup u_2.$$

Отсюда следует

$$\varphi^{(1)}(y, t) = a(-y + u_1),$$

$$\varphi^{(2)}(y, t) = a(-y - u_2),$$

$$\varphi^{(3)}(y, t) = 0. \quad (7.16)$$

Таким образом, имеем задачу, рассмотренную в § 7.2, где необходимо найти закон распределения выходного сигнала системы в установившемся режиме.

Для того чтобы избежать очевидных, но громоздких выкладок, найдем стационарное распределение для более простого частного случая, когда интенсивности $\lambda^{(sr)}(\delta)$ имеют вид, изображенный на рис. 7.5. Тогда интенсивности $v^{(sr)}(y, t)$, графики

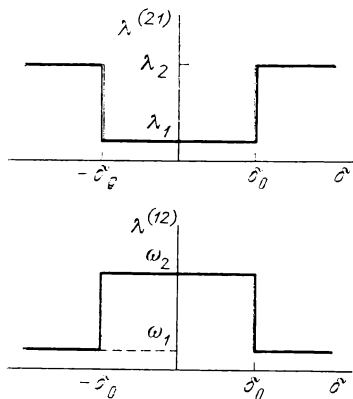


Рис. 7.5. Интенсивности сыгва и восстановления слежения для симметричной пеленгационной характеристики

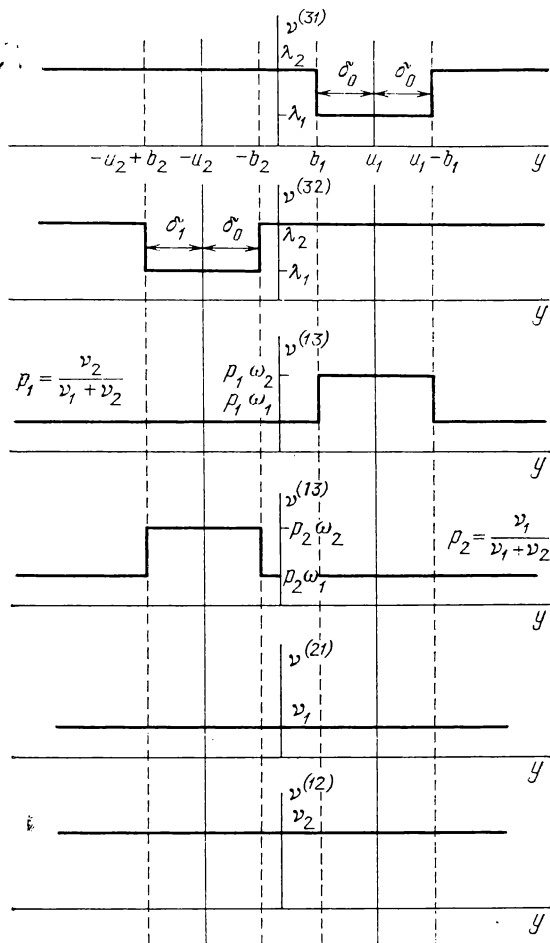


Рис. 7.6. Интенсивности переходов для симметричной пеленгационной характеристики

которых изображены на рис. 7.6, определяются формулами

$$\begin{aligned}
 v^{(21)}(y, t) &= v_1, & v^{(12)}(y, t) &= v_2, \\
 v^{(31)}(y, t) &= \begin{cases} \lambda_1, & b_1 < y < 2u_1 - b_1, \\ \lambda_2, & y \leq b_1, \quad y \geq 2u_1 - b_1, \end{cases} \\
 v^{(32)}(y, t) &= \begin{cases} \lambda_1, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2, \\ \lambda_2, & y \leq -2u_2 + b_2, \quad y > -b_2, \end{cases} \\
 v^{(13)}(y, t) &= \begin{cases} \frac{\omega_2 v_2}{v_1 + v_2}, & b_1 < y < 2u_1 - b_1, \\ \frac{\omega_1 v_2}{v_1 + v_2}, & y \leq b_1, \quad y \geq 2u_1 - b_1, \end{cases} \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

$$v^{(23)}(y, t) = \begin{cases} \frac{\omega_2 v_1}{v_1 + v_2}, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2, \\ \frac{\omega_1 v_1}{v_1 + v_2}, & y \leq -2u_2 + b_2, \quad y > -b_2, \end{cases}$$

где

$$b_1 \triangleq u_1 - \delta_0, \quad b_2 \triangleq u_2 - \delta_0.$$

На основании (7.17) получаем

$$\exp \left[- \int F(y) dy \right] = (u_2 + y)^{\alpha(y)} (u_1 - y)^{\beta(y)}, \quad (7.18)$$

где

$$\alpha(y), \beta(y) = \begin{cases} \alpha_1, \beta_1, & -u_2 \leq y < -b_2, \\ \alpha_2, \beta_2, & -b_2 < y < b_1, \\ \alpha_3, \beta_3, & b_1 < y \leq u_1; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_1 \omega_2 v_1}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} + v_2 \right); \quad \beta_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_2 \omega_1 v_2}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} + v_1 \right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_2 v_1}{v_1 + v_2} + v_2 \right); \quad \beta_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_2 v_2}{v_1 + v_2} + v_1 \right); \quad (7.19)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_2 \omega_1 v_1}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} + v_2 \right); \quad \beta_3 = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda_1 \omega_2 v_2}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} + v_1 \right).$$

Тогда согласно (7.14) с учетом (7.16) и (7.17) имеем

$$f(y) = \begin{cases} c [g(y) + h(y)y] (u_2 + y)^{\alpha(y)-1} (u_1 - y)^{\beta(y)-1}, & -u_2 < y < u_1, \\ 0, & y \leq -u_2, \quad y \geq u_1, \end{cases} \quad (7.20)$$

где

$$g(y), h(y) = \begin{cases} g_1, h_1, & -u_2 < y < -b_2, \\ g_2, h_2, & -b_2 < y < b_1, \\ g_3, h_3, & b_1 < y < u_1; \end{cases}$$

$$g_1 = \left\{ \left[\frac{\lambda_1 (v_1 + v_2)}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} + 1 \right] u_1 + \left[\frac{\lambda_2 (v_1 + v_2)}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} + 1 \right] u_2 \right\} \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)(u_1 + u_2)};$$

$$h_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(v_1 + v_2)}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)(u_1 + u_2)};$$

$$g_1 + h_1 y = \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)} \left[\frac{v_1 + v_2}{\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1} \frac{[\lambda_1 (u_1 - y) + \lambda_2 (u_2 + y)]}{u_1 + u_2} + 1 \right];$$

$$g_2 = 1; \quad h_2 = 0;$$

$$g_3 = \left\{ \left[\frac{\lambda_2 (v_1 + v_2)}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} + 1 \right] u_1 + \left[\frac{\lambda_1 (v_1 + v_2)}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} + 1 \right] u_2 \right\} \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)(u_1 + u_2)};$$

$$h_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 + v_2)}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)(u_1 + u_2)}; \quad (7.21)$$

$$g_3 + h_3 y = \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \lambda_2)} \left[\frac{v_1 + v_2}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2} \frac{\lambda_2 (u_1 - y) + \lambda_1 (u_2 + y)}{u_1 + u_2} + 1 \right];$$

c — неопределенная постоянная, которая находится из условия нормировки (7.12):

$$\int_{-u_2}^{u_1} f(y) dy = 1.$$

Заменой переменной $z = \frac{u_2 + y}{u_1 + u_2}$ перейдем к плотности $f(z) = f(y) \left| \frac{dy}{dz} \right|$. Получаем

$$\int_0^1 f(z) dz = 1. \quad (7.22)$$

Здесь

$$f(z) = c [g(z) - u_2 h(z)] (u_1 + u_2)^{\alpha(z) + \beta(z) - 1} z^{\alpha(z) - 1} (1 - z)^{\beta(z) - 1} +$$

$$+ h(z) (u_1 + u_2)^{\alpha(z) + \beta(z)} z^{\alpha(z)} (1 - z)^{\beta(z) - 1}, \quad 0 < z < 1,$$

$$f(z) = 0, \quad z \leq 0, \quad z \geq 1, \quad (7.23)$$

где

$$\alpha(z), \beta(z), g(z), h(z) = \begin{cases} \alpha_1, \beta_1, g_1, h_1, & 0 < z < p, \\ \alpha_2, \beta_2, g_2, h_2, & p < z < q, \\ \alpha_3, \beta_3, g_3, h_3, & q < z < 1; \end{cases}$$

$$p \triangleq \frac{u_2 - b_2}{u_1 + u_2}, \quad q \triangleq \frac{u_2 + b_1}{u_1 + u_2}. \quad (7.24)$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz = B(\alpha, \beta), \quad \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz = B_l(\alpha, \beta),$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, а $B_l(\alpha, \beta)$ — неполная бета-функция, найдем c из (7.22) — (7.24):

$$c = \{ (\xi_1 - h_1 u_2) (u_1 + u_2)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} B_p(\alpha_1, \beta_1) +$$

$$+ (u_1 + u_2)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} [B_q(\alpha_2, \beta_2) - B_p(\alpha_2, \beta_2)] +$$

$$+ (g_3 - h_3 u_2) (u_1 + u_2)^{\alpha_3 + \beta_3 - 1} [B(\alpha_3, \beta_3) - B_q(\alpha_3, \beta_3)] +$$

$$+ h_1 (u_1 + u_2)^{\alpha_1 + \beta_1} B_p(\alpha_1 + 1, \beta_1) +$$

$$+ h_2 (u_1 + u_2)^{\alpha_3 + \beta_3} [B(\alpha_3 + 1, \beta_3) - B_q(\alpha_3 + 1, \beta_3)] \}^{-1}. \quad (7.25)$$

Плотности $f(y, 1)$, $f(y, 2)$, $f(y, 3)$ находятся по формулам

$$f(y, 1) = c \frac{\omega_1 (u_2 + y)^{\alpha(y)} (u_1 - y)^{\beta(y)-1}}{(\omega_1 + \lambda_2) (u_1 + u_2)},$$

$$f(y, 2) = c \frac{\omega_1 (u_2 + y)^{\alpha(y)-1} (u_1 - y)^{\beta(y)}}{(\omega_1 + \lambda_2) (u_1 + u_2)},$$

$$f(y, 3) =$$

$$\begin{cases} c \frac{\omega_1 (v_1 + v_2) (u_2 + y)^{\alpha_1-1} (u_1 - y)^{\beta_1-1} [\lambda_2 (u_2 + y) + \lambda_1 (u_1 - y)]}{(\omega_1 + \lambda_2) (\omega_1 v_2 + \omega_2 v_1) (u_1 + u_2)}, & -u_2 < y < -b_2, \\ c \frac{\lambda_2 (u_2 + y)^{\alpha_2-1} (u_1 - y)^{\beta_2-1}}{\omega_1 + \lambda_2}, & -b_2 < y < b_1, \\ c \frac{\omega_1 (v_1 + v_2) (u_2 + y)^{\alpha_3-1} (u_1 - y)^{\beta_3-1} [\lambda_1 (u_2 + y) + \lambda_1 (u_1 - y)]}{(\omega_1 + \lambda_2) (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) (u_1 + u_2)}, & b_1 < y < u_1. \end{cases}$$

По известным $f(y)$, $f(y, s)$ ($s = 1, 2, 3$) определяются (см. гл. 4) вероятности состояний структуры $p^{(s)}$, условные плотности $f^{(s)}(y)$ и вероятностные моменты первого, второго и, при желании, более высоких порядков.

Сравним полученное распределение выходного сигнала (7.20) с аналогичным распределением (5.27) для линейной системы. Анализ показывает, что добавление в следящую систему пеленгационной характеристики со случайными границами и случайными срывами и восстановлениями слежения в области этих

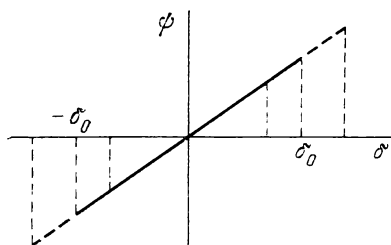


Рис. 7.7. Пеленгационная характеристика слеящего радиолокатора

границ приводит к отклонению распределения от закона Пирсона I типа. Основная особенность этого отклонения — увеличение плотности вероятности выходного сигнала в центральной части его области распределения. Это объясняется тем, что срывы слежения чаще происходят тогда, когда выходной сигнал y находится приблизительно посередине между двумя крайними значениями выходного сигнала u_1 и $-u_2$. При этом сигнал рассогласования находится вблизи границ пеленгационной характеристики $\psi(\delta)$, где вероятность срыва слежения выше, чем в центральной части $\psi(\delta)$.

Пример 7.1. Пусть изображенная на рис. 7.1 система является математической моделью слеящего радиолокатора, на вход которого попеременно со случайными интервалами, распределенными по экспоненциальному закону с показателем ν , поступают сигналы от двух источников радиополучения.

Углы пеленга источников радиоизлучения равны u_0 и $-u_0$. Пеленгационная характеристика радиолокатора изображена на рис. 7.7, где δ_0 и $-\delta_0$ характеризуют некоторые условные границы, в пределах которых интенсивность срывов слежения равна λ_1 , за пределами равна λ_2 . Интенсивность восстановлений слежения равна ω_2 в пределах границ $[-\delta_0, \delta]$ и ω_1 за их пределами. При этом $\lambda_2 > \lambda_1$, $\omega_2 > \omega_1$, $u_0 > \delta_0$.

Такое описание упрощенно учитывает нелинейность диаграммы направленности антенны радиолокатора (наличие основного высокочувствительного и боковых малочувствительных лепестков диаграммы направленности), влияние флуктуаций мощности радиоизлучения и другие случайные факторы.

Найдем закон распределения выходного сигнала y следящего радиолокационного измерителя угла пеленга в установившемся режиме слежения для случая, когда

$$\omega_2 = \lambda_2 \gg \omega_1 = \lambda_1.$$

Согласно (7.19)–(7.21) после упрощений с учетом $\lambda_2 \gg \lambda_1$ приближенно имеем

$$f(y) \approx \begin{cases} \frac{c \lambda_1 (2u_0 + y) (u_0^2 - y^2)^{\alpha-1}}{\lambda_2 u_0}, & -u_0 < y < -u_0 + \delta_0, \\ c (u_0^2 - y^2)^{\beta-1}, & -u_0 + \delta_0 < y < u_0 - \delta_0, \\ \frac{c \lambda_1 (2u_0 - y) (u_0^2 - y^2)^{\alpha-1}}{\lambda_2 u_0}, & u_0 - \delta_0 < y < u_0, \\ 0, & y \leq -u_0, y \geq u_0, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \nu}{a}, \quad \beta = \frac{(\lambda_2/2) + \nu}{a},$$

а постоянная c определяется формулой (7.25), из которой с учетом условия $\lambda_2 \gg \lambda_1$ следует

$$c \approx 2u_0^{2\beta-1} [B_q(\beta, \beta) - B_p(\beta, \beta)],$$

где $B_q(\beta, \beta)$, $B_p(\beta, \beta)$ — неполные бета-функции:

$$B_l(\alpha, \beta) \triangleq \int_0^l z^\alpha (1-z)^\beta dz, \quad 0 < l < 1.$$

Качественный вид закона распределения показан на рис. 7.8.

Как следует из полученных результатов, ось радиолокатора случайным образом колеблется относительно геометрического центра излучающих источников в основном в пределах угла $\pm(u_0 - \delta_0)$ с редкими выбросами за эти границы в пределах угла $\pm u_0$.

Итак, рассмотрена задача сглаживания случайного двоичного сигнала нелинейным инерционным фильтром. Фильтр состоит из

пеленгатора с нелинейной характеристикой со случайными границами (см. рис. 7.1, 7.2) и интегратора, охваченных жесткой обратной связью. Эта задача является частным случаем более общей задачи § 7.2, в рамках которой может быть решен ряд прикладных задач, математические модели которых могут быть

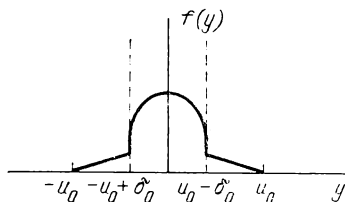


Рис. 7.8. Плотность вероятности выходного сигнала следящего радиолокатора

представлены в виде динамической нелинейной стационарной системы первого порядка с условной марковской структурой, имеющей три состояния. При этом одно из состояний нейтрально (производная выходного сигнала по времени равна нулю).

В частности, может быть получен в аналитической форме закон распределения выходного сигнала не-

линейного фильтра с другими пеленгационными характеристиками, встречающимися в прикладных задачах.

Однако при решении хотя и близких задач, но выходящих за рамки постановки § 7.2, приходится использовать приближенные методы, рассмотренные в гл. 4. Эти методы основаны на двухмоментной параметрической аппроксимации неизвестных условных (при фиксированных состояниях структуры) плотностей вероятностей известными функциями, зависящими от первых двух моментов.

Как следует из результатов § 5.4 и 7.3, при анализе динамических систем со случайно изменяющейся структурой для аппроксимации целесообразно наряду с нормальным законом использовать закон Пирсона I типа.

§ 7.4. Системы с немарковской структурой, заданной случайными интенсивностями переходов

До сих пор наиболее общим классом систем, рассматриваемых в настоящей книге, были системы с условной марковской структурой. Теория и примеры, изложенные в гл. 4 и 7, показывают, что, во-первых, условная марковская структура может служить неплохой моделью для достаточно широкого круга физических явлений и технических систем, а во-вторых, позволяет применять для анализа этих явлений и систем довольно эффективные методы.

Между тем есть немало практических задач, где немарковские свойства системы настолько очевидны, что ими нельзя пренебрегать. Таковы, например, многие из стационарных систем массового обслуживания, в которых нарушается одно из двух необходимых условий марковости — пуассоновский поток входных требований (заявок, вызовов и т. д.) и экспоненциальный закон распределения случайного времени обслуживания [9].

Следует отметить, что законы распределения случайных промежутков времени τ между переходами из одного состояния структуры в другое в общем случае могут отличаться от экспоненциальных. Как показано в § 4.10, для того чтобы структура была марковской, достаточно, чтобы функция распределения промежутка времени $\tau = t - t_0$ перехода из состояния r в состояние s имела вид

$$F^{(sr)}(t, t_0) = 1 - \exp[\varphi^{(sr)}(t_0) - \varphi^{(sr)}(t)]. \quad (7.27)$$

Тогда плотность вероятности промежутка времени $f^{(sr)}(t, t_0)$ и интенсивность перехода $\nu^{(sr)}(t)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} f^{(sr)}(t, t_0) &= \frac{d\varphi^{(sr)}(t)}{dt} \exp[\varphi^{(sr)}(t_0) - \varphi^{(sr)}(t)], \\ \nu^{(sr)}(t) &= \frac{f^{(sr)}(t, t_0)}{1 - F^{(sr)}(t, t_0)} = \frac{d\varphi^{(sr)}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Таким образом, интенсивность перехода $\nu^{(sr)}(t)$ зависит от текущего момента времени. Это указывает на нестационарность процесса изменения структуры. Однако $\nu^{(sr)}(t)$, в отличие от $F^{(sr)}(t, t_0)$ и $f^{(sr)}(t, t_0)$, не зависит от момента t_0 , с которого начинается промежуток времени τ . Это говорит об отсутствии последствия, что является достаточным признаком марковости процесса.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Сравним две системы массового обслуживания одинакового назначения, но различного устройства. Например, две радиоэлектронные системы обнаружения. На входы систем поступают простейшие (т. е. стационарные пуассоновские) потоки сигналов. Обе системы одноканальные. Время обработки информации τ — промежуток времени между поступлением сигнала и принятием решения — случайная величина. Системы имеют неодинаковые алгоритмы обработки информации и, следовательно, различные функции распределения величины τ :

$$F_1(t, t_0) = 1 - \exp[-\lambda(t - t_0)^2],$$

$$F_2(t, t_0) = 1 - \exp[-\lambda(t^2 - t_0^2)], \tau = t - t_0,$$

где t_0 — фиксированный момент времени.

Как видно из выражений для F_1 и F_2 , первая система имеет стационарный алгоритм: ее функции распределения зависят только от разности $t - t_0 = \tau$. Вторая система имеет адаптивный нестационарный алгоритм: с течением времени t на принятие решения требуется в среднем все меньше и меньше времени. Это легко показать, представив функции распределения в виде

$$F_1(\tau, t) = F_1(\tau) = 1 - \exp(-\lambda\tau^2),$$

$$F_2(\tau, t) = 1 - \exp[-\lambda\tau(2t - \tau)].$$

Из этих выражений видно, что при фиксированном τ функция F_1 не зависит от t , а $F_2 \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Плотности вероятности, соответствующие $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$, имеют вид

$$f_1(t, t_0) = 2\lambda(t - t_0) \exp[-\lambda(t - t_0)^2],$$

$$f_2(t, t_0) = 2\lambda t \exp[-\lambda(t^2 - t_0^2)].$$

Отсюда интенсивности обнаружения определяются выражениями

$$\nu_1(t, t_0) = \nu_1(\tau) = 2\lambda\tau, \quad \nu_2(t, t_0) = \nu_2(t) = 2\lambda t.$$

Таким образом, разница между системами состоит в следующем. Первая система — стационарная немарковская (точнее, полумарковская), система с последствием. Поток переходов из одного режима в другой — стационарный непуассоновский. Интенсивность перехода из режима обработки информации в режим поиска цели $\nu_1(\tau)$ зависит от времени обработки информации τ .

Вторая система — нестационарная марковская, система без последствия. Поток переходов — нестационарный пуассоновский. Интенсивность перехода $\nu_2(t)$ не зависит от того, сколько времени система уже находится в режиме обработки информации.

Теория систем массового обслуживания — это одна из областей теории марковских процессов, методы которой позволяют эффективно решать сложные и разнообразные практические задачи. Поэтому системы массового обслуживания стараются по возможности описывать марковскими математическими моделями или моделями, приводимыми к марковским.

То же самое можно сказать о системах со случайной структурой, которые включают в себя класс систем массового обслуживания.

Для того чтобы воспользоваться математическим аппаратом теории марковских процессов и, в частности, методами, развиваемыми в настоящей книге, необходимо систему со случайной структурой представить в виде динамической системы с условной марковской структурой.

В большинстве случаев это можно сделать с помощью широко распространенного способа, который состоит в расширении фазового пространства.

Применительно к рассматриваемой задаче этот способ заключается в следующем.

Имеется система со случайными изменениями структуры, у которой интенсивности переходов (или вероятности переходов, если время дискретно) зависят от случайных параметров $\eta(t)$, $\sigma(t)$. Эти параметры являются в общем случае случайными процессами, которые представляют собой вектор фазовых координат и вектор индексов структуры некоторой динамической системы со случайно изменяющейся структурой.

Математическая постановка задачи описывается выражениями (для непрерывного времени)

$$\dot{y} = \varphi(y, s, \xi, t), \quad \dot{\eta} = \psi(\eta, \sigma, y, s, \xi, t), \quad (7.29)$$

где $y(t)$, $s(t)$, $\xi(t)$ — как и прежде, векторы соответственно фазовых координат, индексов структуры и производящих белых шумов основной системы; $\eta(t)$, $\sigma(t)$, $\xi(t)$ — векторы соответственно фазовых координат, индексов структуры и производящих белых шумов формирующего фильтра; φ и ψ — детерминированные функции времени и своих случайных аргументов.

Изменения структуры $s(t)$ заданы интенсивностями переходов $\nu^{(sr)}(\eta, y, \sigma, t)$, зависящими от случайных параметров η . Изменения структуры $\sigma(t)$ заданы интенсивностями переходов $\lambda^{(sp)}(\eta, y, s, t)$, которые в общем случае также могут зависеть от фазовых координат фильтра η и вектора состояния системы $[y^T, s^T]^T$.

Как следует из (7.29), система, характеризуемая вектором $[y^T, s^T]^T$, не является марковской. В частности, например, если $\eta \triangleq \tau$ — случайный промежуток времени перехода из одного состояния в другое, заданный законом распределения, то структура $s(t)$ представляет собой полумарковскую цепь [9].

Очевидно, что трудности, связанные с немарковскими свойствами системы, легко преодолеть, расширив пространство состояний путем образования вектора $[x^T, \varepsilon^T]^T$: $x^T = [\eta^T, y^T]$, $\varepsilon^T = [\sigma^T, s^T]$. Получаем систему с условной марковской структурой

$$\dot{x} = \chi(x, \varepsilon, \omega, t), \quad (7.30)$$

где $\varepsilon^T = [\sigma^T, s^T]$ — индекс структуры расширенной системы, а $\omega^T = [\xi^T, \xi^T]$ — вектор белых шумов.

Интенсивности переходов расширенной системы $\mu^{(e\delta)}(x, t)$, получаемые из $\nu^{(sr)}(y, \eta, t)$ и $\lambda^{(sp)}(y, \eta, t)$ по правилам, изложенным в § 4.9, зависят от времени и фазовых координат x .

Таким образом, вновь образованная расширенная система (7.30) имеет условную марковскую структуру, заданную условно-детерминированными интенсивностями $\mu^{(e,\delta)}(x, t)$, зависящими от фазовых координат x .

К этой системе применимы все ранее изложенные в настоящей книге методы анализа.

Пример 7.2. В состав следящей системы входит линия связи, подвергаемая помехам, которые приводят к перерывам в поступлении информации (рис. 7.9). Моменты времени нарушения связи образуют простейший поток с интенсивностью γ . В момент нарушения связи начинает работать алгоритм подавления поме-

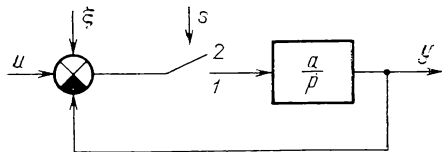


Рис. 7.9. Следящая система с перерывами информации в виде полумарковской цепи

хи, восстанавливающий связь через время τ . Случайная величина τ распределена по релеевскому закону с плотностью вероятности $f(\tau) = 2\lambda\tau e^{-\lambda\tau^2}$. Требуется найти вероятность исправного состояния связи $p^{(1)}(t)$, математическое ожидание $m_y(t)$ и дисперсию $\sigma_y^2(t)$ выходного сигнала $y(t)$ при известных $p^{(1)}(0) = p_0^{(1)}$, $m_y(0) = m_y\delta$, $\sigma_y^2(0) = \sigma_{y_0}^2$.

Таким образом, математическая модель следящей системы описывается уравнением

$$\dot{y} = a^{(s)}(u + \xi - y) \quad (s = 1, 2), \quad a^{(1)} = a, \quad a^{(2)} = 0,$$

где $u(t)$ — детерминированный входной сигнал; $\xi(t)$ — центрированный гауссовский белый шум возмущения с интенсивностью G ; $s(t)$ — полумарковская цепь с двумя состояниями, заданная интенсивностями переходов $v^{(21)}(y, t)$ и $v^{(12)}(y, t)$.

Интенсивность $v^{(21)}(y, t)$ по условию задачи равна v , а интенсивность $v^{(12)}(y, t)$ находится по формуле

$$v^{(12)}(y, t) = \frac{f(t - t_0)}{1 - \int_{t_0}^t f(t - t_0) dt} = \frac{f(\tau)}{1 - F(\tau)} = \frac{2\lambda\tau e^{-\lambda\tau^2}}{e^{-\lambda\tau^2}} = 2\lambda\tau.$$

Для того чтобы воспользоваться методами анализа, изложенными в гл. 4, преобразуем постановку задачи следующим образом. Расширим пространство фазовых координат, образовав вектор $\mathbf{x}^T = [\tau, y]$. Для новой фазовой координаты $x_1 = \tau$ справедливы выражения

$$\dot{x}_1 = 0, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad f(x_{10}) = 2\lambda x_{10} \exp(-\lambda x_{10}^2).$$

В сочетании с заданными

$$\dot{x}_2 = a^{(s)}(u + \xi - x_2), \quad x_2(0) = x_{20} \quad (s = 1, 2),$$

$$a^{(1)} = a, \quad a^{(2)} = 0, \quad p^{(1)}(0) = p_0^{(1)},$$

$$M[x_{20}] = m_{y_0}, \quad M[(x_{20} - m_{y_0})^2] = \sigma_{220} = \sigma_{y_0}^2$$

получаем линейную систему с условной марковской структурой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{x} + \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}\xi \quad (s = 1, 2),$$

где $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$; $\mathbf{B}^{(s)T} = \mathbf{F}^{(s)T} = [0, a^{(s)}]$; $\mathbf{A}^{(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^{(s)} \end{bmatrix}$; $s(t)$ — условная марковская цепь, заданная условно-детерминированными интенсивностями переходов $v^{(21)}(x, t) = v$, $v^{(12)}(t) = 2\lambda x_1$.

Вероятности состояний структуры и моменты фазовых координат этой системы определяются уравнениями (4.12), вероятностные коэффициенты которых находятся из выражений (4.11).

Уравнения (4.12) для данной задачи имеют вид (аргумент опущен)

$$\begin{aligned}
 \dot{p}^{(1)} &= -v_p^{(1)} p^{(1)} + v_p^{(12)} p^{(2)}, \quad \dot{p}^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \\
 \dot{m}_1^{(1)} &= -v_{m1}^{(1)} + (p^{(1)})^{-1} v_{m1}^{(12)} p^{(2)}, \\
 \dot{m}_2^{(1)} &= -v_{m1}^{(1)} + (p^{(1)})^{-1} v_{m2}^{(12)} p^{(2)} - a m_2^{(1)} + a u, \\
 \dot{m}_1^{(2)} &= -v_{m2}^{(2)} + (p^{(2)})^{-1} v_{m1}^{(21)} p^{(1)}, \\
 \dot{m}_2^{(2)} &= -v_{m2}^{(2)} + (p^{(2)})^{-1} v_{m2}^{(21)} p^{(1)}, \\
 \dot{\theta}_{11}^{(1)} &= -N_{\theta 11}^{(1)} + (p^{(1)})^{-1} N_{\theta 11}^{(12)} p^{(2)}, \\
 \dot{\theta}_{12}^{(1)} &= -N_{\theta 12}^{(1)} + (p^{(1)})^{-1} N_{\theta 12}^{(12)} p^{(2)} - a \theta_{12}^{(1)}, \\
 \dot{\theta}_{22}^{(1)} &= -N_{\theta 22}^{(1)} + (p^{(1)})^{-1} N_{\theta 22}^{(12)} p^{(2)} - 2a \theta_{22}^{(1)} + a^2 G, \\
 \dot{\theta}_{11}^{(2)} &= -N_{\theta 11}^{(2)} + (p^{(2)})^{-1} N_{\theta 11}^{(21)} p^{(1)}, \\
 \dot{\theta}_{12}^{(2)} &= -N_{\theta 12}^{(2)} + (p^{(2)})^{-1} N_{\theta 12}^{(21)} p^{(1)}, \\
 \dot{\theta}_{22}^{(2)} &= -N_{\theta 22}^{(2)} + (p^{(2)})^{-1} N_{\theta 22}^{(21)} p^{(1)}, \\
 \theta_{21}^{(s)} &= \theta_{12}^{(s)} \quad (s = 1, 2), \\
 p^{(1)}(0) &= p_0^{(1)}, \quad m_i^{(s)}(0) = m_{i0}, \quad \theta_{ij}^{(s)}(0) = \theta_{ij0} \quad (s = 1, 2; i, j = 1, 2), \\
 m_{10} &= m_\tau = \int_0^\infty 2\lambda \tau^2 e^{-\lambda \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad m_{20} = m_{v_0}, \\
 \theta_{110} &= \sigma_\tau^2 = \int_0^\infty (\tau - m_\tau)^2 2\lambda \tau e^{-\lambda \tau^2} d\tau = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \\
 \theta_{120} &= 0, \quad \theta_{220} = \sigma_{v_0}^2.
 \end{aligned}$$

По выражениям (4.11) определим вероятностные коэффициенты, основываясь на предположениях, что условные плотности вероятности $f^{(s)}(x_1)$ — релеевские, а условные плотности $f^{(s)}(x_2|x_1)$ — гауссовские ($s = 1, 2$).

Основанием для первой гипотезы служит равенство $x_1 = x_{10} = \tau$, а для второй — линейность и инерционность следящей системы.

Найдя вероятностные коэффициенты и обозначив $\tau^{(1)} \triangleq m_1^{(1)}$, $\tau^{(2)} \triangleq m_1^{(2)}$, $y^{(1)} \triangleq m_2^{(1)}$, $y^{(2)} \triangleq m_2^{(2)}$, $T^{(1)} \triangleq \theta_{11}^{(2)}$, $T^{(2)} \triangleq \theta_{11}^{(2)}$, $\Theta^{(1)} \triangleq \theta_{12}^{(1)}$, $\Theta^{(2)} \triangleq \theta_{12}^{(2)}$, $Y^{(1)} \triangleq \theta_{22}^{(1)}$, $Y^{(2)} \triangleq \theta_{22}^{(2)}$, $\bar{\tau} \triangleq m_1$, $\bar{y} \triangleq m_2$, $T \triangleq \theta_{11}$, $\Theta \triangleq \theta_{12}$, $Y \triangleq \theta_{22}$, получаем

$$\dot{p}^{(1)} = -v p^{(1)} + 2\lambda \tau^{(2)} p^{(2)}, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tau}^{(1)} &= \frac{2\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} [T^{(2)} + \tau^{(2)} (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})], \\
\dot{y}^{(1)} &= \frac{2\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} [\Theta^{(2)} + \tau^{(2)} (y^{(2)} - y^{(1)})] - ay^{(1)} + au, \\
\dot{\tau}^{(2)} &= -2\lambda T^{(2)} + \frac{vp^{(1)}}{p^{(2)}} (\tau^{(1)} - \tau^{(2)}), \\
\dot{y}^{(2)} &= -2\lambda \Theta^{(2)} + \frac{vp^{(1)}}{p^{(2)}} (y^{(1)} - y^{(2)}), \\
\dot{T}^{(1)} &= \frac{2\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} \left\{ \frac{2(\pi - 3)\tau^{(2)}T^{(2)}}{4 - \pi} + 2T^{(2)} (\tau^{(2)} - \tau^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + \tau^{(2)} [(\tau^{(2)} - \tau^{(1)})^2 + T^{(2)} - T^{(1)}] \right\}, \\
\dot{\Theta}^{(1)} &= -a\Theta^{(1)} + \frac{2\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} \left\{ \frac{2(\pi - 3)\tau^{(2)}\Theta^{(2)}}{4 - \pi} + T^{(2)} (y^{(2)} - y^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + \Theta^{(2)} (\tau^{(2)} - \tau^{(1)}) + \tau^{(2)} [(\tau^{(2)} - \tau^{(1)}) (y^{(2)} - y^{(1)}) + \Theta^{(2)} - \Theta^{(1)}] \right\}, \\
\dot{X}^{(1)} &= -\frac{v(\Theta^{(1)})^2}{T^{(1)}} + \frac{2\lambda p^{(2)}}{p^{(1)}} \left\{ \frac{\tau^{(2)}(\Theta^{(2)})^2}{T^{(2)}} + 2\Theta^{(2)} (y^{(2)} - y^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + \tau^{(2)} [(y^{(2)} - y^{(1)})^2 - Y^{(1)}] \right\} - 2aY^{(1)} + a^2G, \\
\dot{T}^{(2)} &= -\frac{4(\pi - 3)\lambda\tau^{(2)}T^{(2)}}{4 - \pi} + \frac{vp^{(1)}}{p^{(2)}} [T^{(1)} - T^{(2)} + (\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2], \\
\dot{\Theta}^{(2)} &= -\frac{4(\pi - 3)\lambda\tau^{(2)}\Theta^{(2)}}{4 - \pi} + \frac{vp^{(1)}}{p^{(2)}} [\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)} + (\tau^{(1)} - \tau^{(2)})(y^{(1)} - y^{(2)})], \\
\dot{Y}^{(2)} &= -2\lambda\tau^{(2)} \left[\frac{(\Theta^{(2)})^2}{T^{(2)}} - Y^{(2)} \right] + \frac{vp^{(1)}}{p^{(2)}} \left[\frac{(\Theta^{(1)})^2}{T^{(1)}} - Y^{(2)} + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 \right], \\
\bar{\tau} &= \tau^{(1)}p^{(1)} + \tau^{(2)}p^{(2)}, \quad m_y \triangleq \bar{y} = y^{(1)}p^{(1)} + y^{(2)}p^{(2)}, \\
T &= T^{(1)}p^{(1)} + T^{(2)}p^{(2)} + (\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 p^{(1)}p^{(2)}, \\
\Theta &= \Theta^{(1)}p^{(1)} + \Theta^{(2)}p^{(2)} + (\tau^{(1)} - \tau^{(2)}) (y^{(1)} - y^{(2)}) p^{(1)}p^{(2)}, \\
\sigma_y^2 &\triangleq Y = Y^{(1)}p^{(1)} + Y^{(2)}p^{(2)} + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 p^{(1)}p^{(2)}, \\
p^{(1)}(0) &= p_0^{(1)}, \quad \tau^{(1)}(0) = \tau^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \\
y^{(1)}(0) &= y^{(2)}(0) = m_{y_0}, \quad T^{(1)}(0) = T^{(2)}(0) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right), \\
\Theta^{(1)}(0) &= \Theta^{(2)}(0) = 0, \quad Y^{(1)}(0) = Y^{(2)}(0) = \sigma_{y_0}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, динамическая система первого порядка с полумарковской структурой преобразована в эквивалентную систему второго порядка с условной марковской структурой.

Одной из фазовых координат этой новой системы по-прежнему является выходной сигнал следящей системы y , другой фазовой координатой — случайный промежуток времени перерыва связи τ .

Применив метод двухмоментной аппроксимации, где условные плотности $f^{(s)}(\tau)$ предполагаются релеевскими, а условные плотности $f^{(s)}(y|\tau)$ — нормальными ($s = 1, 2$), получаем систему приближенных дифференциальных уравнений для вероятностей состояний структуры $p^{(s)}(t)$ ($s = 1, 2$), математических ожиданий $\bar{\tau}(t)$, $\bar{y}(t)$, дисперсий $T(t)$, $Y(t)$ и взаимного корреляционного момента $\Theta(t)$.

Решая численно эти уравнения, получаем искомые $\bar{y}(t)$, $Y(t)$.

МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СКАЧКООБРАЗНОЙ СМЕНОЙ СТРУКТУРЫ

§ 8.1. Мультиструктура систем с сосредоточенными переходами

В инженерной практике, навигации, робототехнике возникают задачи комплексной автоматизации управления на различных этапах. Каждый из этих этапов может резко отличаться по характеру движения объекта управления и описываться различными уравнениями. В частности, некоторые фазовые координаты объекта управления на разных этапах имеют или должны иметь значения, принадлежащие определенной области фазового пространства. Автоматизация таких процессов достигается с помощью комбинированных систем управления. Переход от одной системы к другой должен совершаться автоматически при попадании определенных фазовых координат в заданную область.

К рассматриваемым процессам относится, например, слежение за источником сигнала специальным следящим устройством. Фазовая координата, характеризующая положение источника (объекта), должна находиться в пределах заданной области W . При выходе из этой области нарушается функционирование системы как следящей, срывается процесс слежения. Система переходит в другой режим, в котором также должно быть обеспечено управление, при котором произойдет возврат к первому состоянию. Автоматизация этих процессов приводит к комбинированной системе, состоящей из двух структур. Аналогичные задачи возникают в навигации летательных аппаратов при необходимости обеспечения различных заданных режимов полета, переходы в которые совершаются в случайные моменты времени при достижении некоторыми фазовыми координатами определенных границ.

Комбинированные системы управления, обеспечивающие автоматизацию управления и переключения на всех режимах, имеют различную структуру, а их динамика характеризуется уравнениями типа (1.1) или (1.3), в каждой из n возможных структур.

Мультиструктурные комбинированные автоматические системы находят применение при автоматизации научных исследований, в космических полетах и в промышленной практике. Среди мультиструктурных систем важное практическое значение имеют

комбинированные автоматические системы с последовательной сменой структур. Для них основной задачей является анализ двухструктурной или двухрежимной системы с сосредоточенными переходами. Для такой системы общее уравнение (4.1) запишем в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{y}, t)\mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{y}, t)\xi(t) \quad (s = 1, 2), \quad (8.1)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Пребывание системы в первой структуре в общем виде обозначим так:

$$\mathbf{y} \in W, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (8.2)$$

где T_1 — время функционирования системы в первом состоянии; W — заданная область фазового пространства. В практических задачах область W может быть задана в виде прямоугольного гиперпараллелепипеда и определена векторным неравенством

$$\mathbf{d} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad (8.3)$$

где $\mathbf{d}$, $\mathbf{c}$ — заданные граничные векторные величины. Векторное неравенство $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$ следует понимать так, что каждая составляющая вектора $\mathbf{c}$ меньше или больше соответствующей составляющей вектора $\mathbf{d}$: $c_i \leq d_i$. В ряде задач ограничения на вектор фазовых координат или его компоненты существуют только с одной стороны. В таких случаях указывается только одна граница:

$$\mathbf{y} < \mathbf{c} \quad \text{или} \quad \mathbf{d} < \mathbf{y}.$$

Характерной чертой рассматриваемых систем с сосредоточенными переходами является существование двух режимов работы или двух структур. Автоматическая система на границе $y^{(rs)} - y = 0$ области W изменяет структуру и переходит в другой режим работы. Как показано в гл. 3, при анализе таких систем полной вероятностной характеристикой являются функции распределения плотности вероятности $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и вероятности состояний $p^{(s)}$ ($s = 1, 2$). Поэтому при анализе необходимо рассматривать изменения этих вероятностей при переходе границы $y^{(rs)}$ области W . На границе $y^{(rs)}$ происходит поглощение реализаций (сток вероятности) одного состояния и возникновение (восстановление) реализации (и исток вероятности) другого состояния. Поглощение и восстановление реализаций описывается функциями (3.56) или (3.57). В рассматриваемой задаче эти нормированные функции поглощения и восстановления запишем в форме

$$\beta^{(rs)}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t)) \delta(y^{(rs)} - y), \quad (8.4)$$

$$\gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{n}_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t)) \delta(y^{(sr)} - y) \quad (r, s = 1, 2; r \neq s), \quad (8.5)$$

где предполагается, что при пересечении границы реализации прежнего состояния возникает с вероятностью $q^{(sr)}(y, t|y', t) = \delta(y - y')$, т. е. с тем же начальным значением.

Эти формулы можно переписать в другом виде, если гиперповерхность $L(y)$ представлена в виде параллелепипеда с границами c_k, d_k ($c_k < d_k$) по фазовым координатам

$$\beta^{(rs)}(y, t) = \sum_{k=1}^{n_y} \pi_k^{(s)}(y, t) [\text{sign}(\mathbf{n}_{d_k}^0 \cdot \mathbf{y}_k^0) \delta(d_k - y) - \text{sign}(\mathbf{n}_{c_k}^0 \cdot \mathbf{y}_k^0) \delta(c_k - y)], \quad (8.6)$$

$$\gamma^{(sr)}(y, t) = \sum_{k=1}^{n_y} \pi_k^{(r)}(y, t) [\text{sign}(\mathbf{n}_{d_k}^0 \cdot \mathbf{y}_k^0) \delta(d_k - y) - \text{sign}(\mathbf{n}_{c_k}^0 \cdot \mathbf{y}_k^0) \delta(c_k - y)] \quad (8.7)$$

($r, s = 1, 2; r \neq s$).

Задача вероятностного анализа состоит в определении вероятности каждого состояния $p^{(s)}(t)$, в котором находится система, для произвольного момента времени t и вероятностных моментов фазовых координат.

§ 8.2. Двухструктурная система с сосредоточенными переходами

Рассмотрим типовую двухструктурную автоматическую систему самонаведения [38], применяемую в управлении ракетами. Изучим динамику самонаведения более детально, чем это было сделано в гл. 7. Первая структура обеспечивает самонаведение

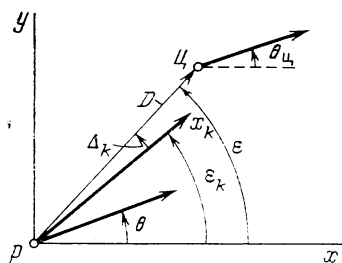


Рис. 8.1. Кинематическая схема самонаведения

ракеты на цель на основе измерения параметра управления — угловой скорости линии визирования. Последнее реализуется с помощью следящего устройства — измерителя на ракете. Этот измеритель следит за целью, если она находится в его поле зрения. При выходе цели из этой области происходит срыв управления. Система переходит во второй режим. Структура ее должна быть изменена так, чтобы, управляя измерителем, направить его

ось чувствительности на цель, обеспечить повторный захват и слежение за ней. Это можно обеспечить специальным прогнозирующим звеном, выдающим сигнал, равный прогнозируемой угловой скорости линии визирования. С помощью такого сигнала в режиме прогноза происходит управление ракетой и измерителем.

В соответствии с кинематической схемой самонаведения (рис. 8.1) запишем уравнения движения ракеты в горизонтальной плоскости при малых углах $\varepsilon = \theta$ и $\varepsilon = \theta_{\text{ц}}$ в режиме самонаведения (первая структура) при $v = \text{const}$, $v_{\text{ц}} = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\dot{D} &= v_{\text{ц}} - v, \quad D(0) = D_0, \\ \dot{\varepsilon} &= -\frac{\dot{D}}{D}\varepsilon - \frac{v}{D}\theta + \frac{a_{\text{ц}}}{D}t + \frac{1}{D} \int_0^t x_{\text{ц}}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \\ \dot{\varepsilon}_k &= \omega_k, \quad \varepsilon_k(0) = \varepsilon_0, \\ \dot{\omega}_k &= -k\omega_k - k\frac{\dot{D}}{D}\varepsilon - k\frac{v}{D}\theta + k\frac{a_{\text{ц}}}{D}t + k\frac{1}{D} \int_0^t x_{\text{ц}}(\tau) d\tau, \\ \omega_k(0) &= \omega_{k0}, \\ \dot{\theta} &= k_0(\omega_k + x), \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \dot{\Delta}_k &= -\frac{\dot{D}}{D}\varepsilon - \frac{v}{D}\theta + \frac{a_{\text{ц}}}{D}t + \frac{1}{D} \int_0^t x_{\text{ц}}(\tau) d\tau - \omega_k, \quad \Delta_k(0) = 0, \\ \dot{a}_{\text{ц}} &= 0, \quad a_{\text{ц}}(0) = a_{\text{ц}0}.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Здесь $a_{\text{ц}}$ — случайная величина, характеризующая случайный постоянный маневр цели и имеющая $M[a_{\text{ц}}] = m_{\text{ц}}$; $M[(a_{\text{ц}} - m_{\text{ц}})^2] = D_{\text{ц}}$; $x_{\text{ц}}(t)$ — центрированный белый шум с интенсивностью $G_{\text{ц}}$, характеризующий случайный маневр цели; $x(t)$ — ошибка измерения угловой скорости линии визирования на цель. Величина

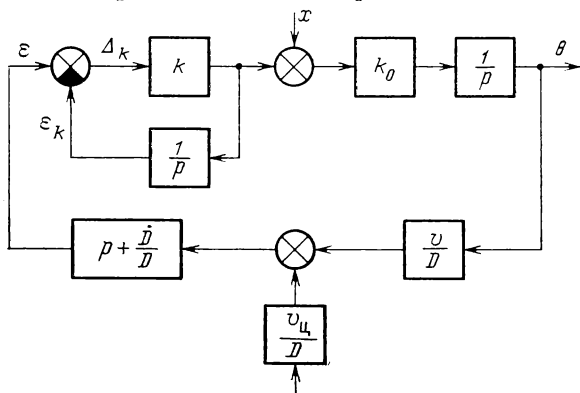


Рис. 8.2. Структурная схема системы самонаведения

$\Delta_k = \varepsilon - \varepsilon_k$ представляет собой рассогласование между направлением на цель и направлением оси чувствительности пеленгатора следящего устройства. На рис. 8.2 изображена структурная схема системы самонаведения, соответствующая уравнениям (8.8).

Величина рассогласования Δ_k стеснена ограничивающим условием при самонаведении

$$|\Delta_k| < 2\Delta. \quad (8.9)$$

Если $|\Delta_k| \geq 2\Delta$, то следящее устройство теряет цель, система переходит во второй режим управления по прогнозируемому

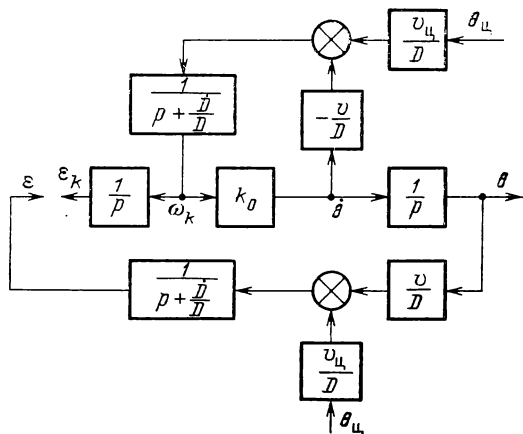


Рис. 8.3. Структурная схема системы наведения в автоматическом режиме прогноза

значению параметра управления — угловой скорости вектора дальности ω_k .

Во втором режиме уравнения движения следующие:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= v_{ц} - v, \quad D(0) = D_0, \\ \dot{\varepsilon} &= -\frac{\dot{D}}{D} \varepsilon - \frac{v}{D} \theta + \frac{a_{ц}}{D} t + \frac{1}{D} \int_0^t x_{ц}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \\ \dot{\varepsilon}_k &= \omega_k, \quad \varepsilon_k(0) = \varepsilon_0, \\ \dot{\omega}_k &= -\frac{2\dot{D}}{D} \omega_k - \frac{v}{D} k_0 \omega_k - \frac{1}{D} a_{ц} + \frac{1}{D} \int_0^t x_{ц}(\tau) d\tau, \quad \omega_k(0) = 0, \\ \dot{\theta} &= k_0 \omega_k, \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \dot{\Delta}_k &= -\frac{\dot{D}}{D} \varepsilon - \frac{v}{D} \theta + \frac{a_{ц}}{D} t + \frac{1}{D} \int_0^t x_{ц}(\tau) d\tau - \omega_k, \quad \Delta_k(0) = 0, \\ \dot{a}_{ц} &= 0, \quad a_{ц}(0) = a_{ц0}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

На рис. 8.3 изображена структурная схема системы наведения во втором режиме, обеспечивающем траекторный захват цели.

Таким образом, рассматриваемая система наведения описывается нестационарными дифференциальными уравнениями для шестимерного вектора состояния y с компонентами $y_1 = \varepsilon$, $y_2 = \varepsilon_k$, $y_3 = \omega_k$, $y_4 = \theta$, $y_5 = \Delta_k$, $y_6 = a_k$.

Уравнения (8.8) и (8.10) с учетом введенных обозначений можно представить в форме

$$\dot{y} = A^{(s)}(t)y + F^{(s)}(t)\xi(t), \quad y(0) = y_0 \quad (s = 1, 2), \quad (8.11)$$

где

$$A^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{D}}{D} & 0 & 0 & -\frac{v}{D} & 0 & \frac{1}{D}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k\frac{\dot{D}}{D} & 0 & -k & -k\frac{v}{D} & 0 & \frac{k}{D}t \\ 0 & 0 & k_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{D}}{D} & 0 & -1 & \frac{v}{D} & 0 & \frac{1}{D}t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{D}}{D} & 0 & 0 & -\frac{v}{D} & 0 & \frac{1}{D}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\dot{D}+k_0v}{D} & 0 & 0 & \frac{1}{D}t \\ 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{D}}{D} & 0 & -1 & -\frac{v}{D} & 0 & \frac{1}{D}t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$F^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (8.12)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t x_{\text{ц}}(\tau) d\tau \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad G_{\xi} = \begin{bmatrix} tG_{\text{ц}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{ц}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (8.11) находится в первом состоянии при $-\Delta < y_5 < \Delta$ и во втором состоянии при $y_5 \leq -\Delta$, $y_5 \geq \Delta$. К уравнениям (8.11) следует добавить еще формулу для вычисления текущей линейной ошибки самонаведения (пролета цели) в картинной плоскости цели [38]

$$h = -\frac{D^2}{\dot{D}} \dot{\varepsilon} = D\varepsilon + \frac{D}{\dot{D}} v\theta - \frac{D}{\dot{D}} a_{\text{ц}}t. \quad (8.13)$$

Эта формула определяет ошибку самонаведения, если в момент t система управления выключается и ракета и цель далее летят прямолинейно с дальности D .

Рассматриваемая динамическая двухструктурная система может переходить из одного состояния в другое несколько раз.

§ 8.3. Вероятностный анализ двухструктурной системы

Задача вероятностного анализа автоматической двухструктурной системы самонаведения состоит в определении вероятности каждого состояния для произвольного момента времени, среднего времени пребывания в них, а также вероятностных моментов фазовых координат и ошибки наведения.

Условные функции плотности вероятности $f^{(1)}(y, t)$, $f^{(2)}(y, t)$ фазовых координат для первого и второго состояний соответственно определяются из нормированных уравнений типа (3.89):

$$\frac{\partial f^{(s)}(y, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(s)}(y, t) - \sum_{r=1 \neq s}^2 \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} f^{(s)}(y, t) \quad (s = 1, 2), \quad (8.14)$$

где векторы плотности потоков вероятности $\pi^{(s)}(y, t)$ согласно (3.58) следующие:

$$\pi^{(s)}(y, t) = \alpha^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} \{ \nabla_y^T [D^{(s)T}(y, t) f^{(s)}(y, t)] \}^T. \quad (8.15)$$

Вектор сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$ и матрица диффузии $D^{(s)}(y, t)$ согласно (8.10), (2.38) и (2.40) для данной системы выражаются формулами

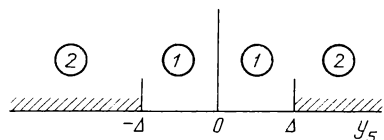


Рис. 8.4. Область существования первого и второго состояний

$$\begin{aligned} \alpha^{(s)}(y, t) &= A^{(s)}(y, t), \\ D^{(s)}(y, t) &= F^{(s)}(t) G_s(t) F^{(s)T}(t). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Поглощение и восстановление реализаций случайных процессов происходят только по одной фазовой координате y_5 (рис. 8.4). В соответствии с рис. 8.4 и формулой (8.6) функции поглощения следующие:

$$\beta^{(rs)}(y, t) = \pi_5^{(s)}(y, t) [\delta(\Delta + y_5) + \delta(\Delta - y_5)] \quad (r, s = 1, 2; r \neq s). \quad (8.17)$$

Если считать, что захват цели осуществляется мгновенно при попадании y_5 на границу области $(-\Delta, \Delta)$, то на основании рис. 8.4 и формулы (8.7) функции восстановления реализаций

случайного процесса имеют вид

$$\gamma^{(sr)}(\mathbf{y}, t) = \pi_5^{(r)}(\mathbf{y}, t) [\delta(\Delta + y_5) - \delta(\Delta - y_5)] \\ (r, s = 1, 2; r \neq s), \quad (8.18)$$

где $\pi_5^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ — компонент вектора плотности потока вероятности по координате y_5 .

Для вероятностей $p^{(s)}(t)$ ($s = 1, 2$) состояний запишем

$$\dot{p}^{(1)} = -p^{(1)}\beta_p^{(21)}(t) + p^{(2)}\gamma_p^{(12)}(t), \quad p^{(1)}(t_0) = 1, \\ \dot{p}^{(2)} = -p^{(2)}\beta_p^{(12)}(t) + p^{(1)}\gamma_p^{(21)}(t), \quad p^{(2)}(t_0) = 0. \quad (8.19)$$

Но так как $p^{(2)} = 1 - p^{(1)}$, то следует вместо двух уравнений (8.19) рассматривать одно уравнение

$$\dot{p}^{(1)} = -p^{(1)} [\beta_p^{(21)}(t) + \gamma_p^{(12)}(t)] + \gamma_p^{(12)}(t), \quad p^{(1)}(t_0) = 1, \quad (8.20)$$

где

$$\beta_p^{(21)}(t) = \gamma_p^{(21)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(21)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(21)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \\ \beta_p^{(12)}(t) = \gamma_p^{(12)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(12)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{(12)}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}.$$

С учетом (8.19) уравнения (8.14) можно записать так:

$$\frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(1)}(\mathbf{y}, t) - \beta^{(2)}(\mathbf{y}, t) + \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \gamma^{(12)}(\mathbf{y}, t) + \\ + \left[\beta_p^{(21)}(t) - \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \gamma_p^{(12)}(t) \right] f^{(1)}(\mathbf{y}, t), \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{(2)}(\mathbf{y}, t) - \beta^{(12)}(\mathbf{y}, t) + \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \gamma^{(21)}(\mathbf{y}, t) + \\ + \left[\beta_p^{(12)}(t) - \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \gamma_p^{(21)}(t) \right] f^{(2)}(\mathbf{y}, t). \quad (8.22)$$

Вычислим $\pi_5^{(s)}(\mathbf{y}, t)$. Для этого рассмотрим выражения (8.15), (8.16) и матрицы $\mathbf{A}^{(s)}(t)$, $\mathbf{F}^{(s)}(t)$, $\mathbf{G}_5^{(s)}(t)$. Из этих выражений следует, что компоненты $\pi_5^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ для $s = 1, 2$ следующие:

$$\pi_5^{(s)}(\mathbf{y}, t) = A_5^{(s)}(t) \mathbf{y} f^{(1)}(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} G_{11} \left[\frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_1} + \frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_3} + \right. \\ \left. + \frac{\partial f^{(s)}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_5} \right] \quad (s = 1, 2), \quad (8.23)$$

где $A_5^{(s)}(t)$ — пятая строка матрицы $\mathbf{A}^{(s)}(t)$:

$$A_5^{(1)} = A_5^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{D} & 0 & -1 & -\frac{v}{D} & 0 & \frac{t}{D} \end{bmatrix}.$$

Вычислим величины $\beta_p^{(rs)}(t)$ и $\gamma_p^{(sr)}(t)$ по формулам (8.21) с учетом (8.17), (8.18) и (8.23). В результате получим

$$\beta_p^{(21)}(t) = \left(-\frac{\dot{D}}{D} m_1^{(1)} - m_3^{(1)} - \frac{v}{D} m_4^{(1)} + \frac{t}{D} m_6^{(1)} \right) [f_5^{(1)}(\Delta, t) + f_5^{(1)}(-\Delta, t)] - \frac{t}{2D^2} G_{11} \left[\frac{\partial}{\partial y_5} f_5^{(1)}(y_5, t) \Big|_{y_5=\Delta} + \frac{\partial}{\partial y_5} f_5^{(1)}(y_5, t) \Big|_{y_5=-\Delta} \right], \quad (8.24)$$

$$\gamma_p^{(12)}(t) = \left(-\frac{\dot{D}}{D} m_1^{(2)} - m_3^{(2)} - \frac{v}{D} m_4^{(2)} + \frac{t}{D} m_6^{(2)} \right) [f_5^{(2)}(\Delta, t) - f_5^{(2)}(-\Delta, t)] - \frac{t}{2D^2} G_{11} \left[\frac{\partial}{\partial y_5} f_5^{(2)}(y_5, t) \Big|_{y_5=\Delta} - \frac{\partial}{\partial y_5} f_5^{(2)}(y_5, t) \Big|_{y_5=-\Delta} \right],$$

$$\beta_p^{(12)}(t) = \gamma_p^{(12)}(t), \quad \gamma_p^{(21)}(t) = \beta_p^{(21)}(t),$$

где $f_5^{(s)}(y_5, t)$ — одномерная функция плотности вероятности для координаты y_5 .

Как следует из изложенного, вероятностный анализ рассматриваемой двухструктурной автоматической комбинированной системы состоит в совместном решении уравнений (8.19), (8.22) с учетом соответствующих формул для входящих в эти уравнения коэффициентов. В результате можно определить функции плотности вероятности распределения фазовых координат $f^{(s)}(y, t)$ и вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ ($s = 1, 2$). Кроме того, можно определить также функцию плотности вероятности распределения времени перехода системы из первого состояния и обратно

$$p(t) = \{ -p_t^{(1)}(t) [\beta_p^{(21)}(t) + \gamma_p^{(12)}(t)] + \gamma_p^{(12)}(t) \} \text{sign } \dot{p}^{(1)}. \quad (8.25)$$

Анализ комбинированной системы наведения завершается вычислением вероятностных моментов текущей ошибки (пролета) в картинной плоскости цели с использованием формулы (8.13). На основании этой формулы получим вероятностные моменты: математическое ожидание $m_h = M[h]$ в форме

$$m_h(t) = D m_1(t) + \frac{D}{\dot{D}} v m_4(t) - \frac{D}{\dot{D}} t m_6(t), \quad (8.26)$$

дисперсию $\theta_h = M[(h - m_h)^2]$ в виде

$$\begin{aligned} \theta_h(t) = D^2 \theta_{11} + \frac{D^2}{\dot{D}^2} v^2 \theta_{44} + \frac{D^2}{\dot{D}^2} t^2 \theta_{66} + \\ + 2 \frac{D^2}{\dot{D}} v \theta_{44} - 2 \frac{D^2}{\dot{D}} t \theta_{16} - 2 \frac{D^2}{\dot{D}^2} v t \theta_{46}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где

$$\begin{aligned} m_i = \sum_{s=1}^2 p^{(s)} m_i^{(s)} \quad (i = \overline{1, 6}); \\ \theta_{ij} = \sum_{s=1}^2 p^{(s)} [\theta_{ij}^{(s)} + m_i^{(s)} (m_j^{(s)} - m_j)] \quad (i, j = \overline{1, 6}). \end{aligned}$$

Для оценки точности попадания ракеты в цель в формулах (8.26), (8.27) следует положить $t = t_k - t_1$, где $t_k = \frac{D_0}{v - v_{ц}}$; $t_1 = \frac{D_1}{v - v_{ц}}$; D_1 — малая дальность неуправляемого полета, зависящая от типа системы управления и цели [33, 43].

Изложенный точный алгоритм вероятностного анализа двухструктурной системы сложен из-за необходимости интегрирования уравнений (8.22) в частных производных. Поэтому практическое значение имеют приближенные методы анализа, основанные на двухмоментной или более полной аппроксимации функций $f^{(s)}(y, t)$ [23, 32].

В частности, при двухмоментной гауссовской аппроксимации функций $f^{(s)}(y, t)$ можно записать

$$f^{(s)}(y, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} |\Theta^{(s)}(t)|}} \exp \left\{ - \frac{(y - m^{(s)})^T [\Theta^{(s)}(t)]^{-1} (y - m^{(s)})}{2} \right\}. \quad (8.28)$$

Необходимо определить математическое ожидание $m^{(s)}(t)$ вектора y и дисперсионную матрицу $\Theta^{(s)}(t)$ в первой и второй структурах. Для этого вместо уравнений (8.22) следует интегрировать уравнения для $m^{(s)}$ и $\Theta^{(s)}$ ($s = 1, 2$):

$$\dot{m}^{(s)} = A^{(s)}(t) m^{(s)} - \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y - m^{(s)}) \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] dy \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & A^{(s)}(t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} A^{(s)T}(t) - \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [(y - m^{(s)})(y - m^{(s)})^T - \Theta^{(s)}] \times \\ & \times \left[\beta^{(rs)}(y, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \gamma^{(sr)}(y, t) \right] dy + F^{(s)}(t) G_s F^{(s)T}(t) \quad (s = 1, 2). \end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения формулы для $\beta^{(rs)}(y, t)$ и $\gamma^{(sr)}(y, t)$ ($r, s = 1, 2$) из (8.17), (8.18) и (8.23), приведем их к виду

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(s)} = & A^{(s)} m^{(s)} - \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y - m^{(s)}) \sum_{k=1}^6 \left\{ \left[A_{sk}^{(s)}(t) y_k f^{(s)}(y, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} D_{5k}^{(s)}(t) \frac{\partial f^{(s)}(y, t)}{\partial y_k} \right] - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \left[A_{5k}^{(r)}(t) y_k f^{(r)}(y, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} D_{5k}^{(r)}(t) \frac{\partial f^{(r)}(y, t)}{\partial y_k} \right] \right\} [\delta(\Delta + y_5) + \delta(\Delta - y_5)] dy, \quad (8.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & \mathbf{A}^{(s)}(t) \Theta^{(s)} + \Theta^{(s)} \mathbf{A}^{(s)\top}(t) - \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)})^\top - \\ & - \Theta^{(s)}] \sum_{h=1}^6 \left\{ \left[A_{5h}^{(s)}(t) y_h f^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} D_{5h}^{(s)}(t) \frac{\partial f^{(s)}(y, t)}{\partial y_h} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \left[A_{5h}^{(r)}(t) y_h f^{(r)}(y, t) - \frac{1}{2} D_{5h}^{(r)}(t) \frac{\partial f^{(r)}(y, t)}{\partial y_h} \right] \right\} \times \\ & \times [\delta(\Delta + y_5) + \delta(\Delta - y_5)] dy \quad (s = 1, 2), \quad (8.34) \end{aligned}$$

где $A_{5h}^{(s)}(t)$ — компоненты пятой строки матрицы $\mathbf{A}^{(s)}(t)$; $D_{5h}^{(s)}(t)$ — компоненты пятой строки диффузионной матрицы $\mathbf{D}^{(s)}(t)$.

Пример 8.1. Линейная система стабилизации находится под воздействием сигнала $x_0 = \text{const}$ и гауссовского белого шума ξ с интенсивностью G . Система имеет два детерминированных состояния. В первом состоянии она имеет структуру, изображенную на рис. 8.5, и уравнение функционирования

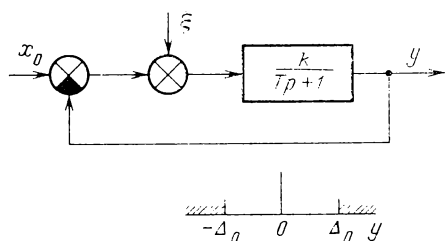


Рис. 8.5. Система стабилизации (первая структура)

с интенсивностью G . Система имеет два детерминированных состояния. В первом состоянии она имеет структуру, изображенную на рис. 8.5, и уравнение функционирования

$$\dot{y} = -\frac{1+k}{T} y + \frac{x_0}{T} - \frac{k}{T} \xi(t).$$

При достижении координатой y значения $\pm\Delta_0$ происходит срыв стабилизации. Система переходит во второе состояние поиска со структурой, изображенной на рис. 8.6, и уравнением вида

$$\dot{y} = -\frac{1}{T} y + \frac{x_0}{T} - \frac{k}{T} \xi(t).$$

При попадании координаты y в режим поиска в область $(-\Delta, \Delta)$ происходит захват сигнала и втягивание (переход) в первое состояние. В начальный момент система находится в первом состоянии $y(t_0) = y_0$. Граница Δ области поиска больше границы Δ_0 срыва ($\Delta > \Delta_0$). На границе $\pm\Delta_0$ происходит сосредоточенный переход системы (срыв стабилизации), а в области $(-\Delta, \Delta)$ происходит распределенный переход с интенсивностью $v(y)$.

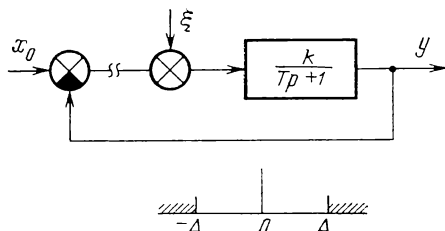


Рис. 8.6. Система стабилизации (вторая структура)

Функции поглощения и восстановления реализаций случайных процессов следующие:

$$\beta^{(21)}(y, t) = \pi^{(1)}(y, t) [\delta(\Delta_0 - y) + \delta(\Delta_0 + y)],$$

$$\begin{aligned}\beta^{(12)}(y, t) &= v(y) f^{(2)}(y, t), \quad -\Delta \leq y \leq \Delta, \\ \gamma^{(12)}(y, t) &= \beta^{(12)}(y, t), \quad \gamma^{(21)}(y, t) = \beta^{(21)}(y, t).\end{aligned}$$

Плотности потоков вероятности в данной задаче на основании (8.15) следующие:

$$\pi^{(2)}(y, t) = \alpha^{(s)}(y, t) f^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\partial}{\partial y} f^{(s)}(y, t).$$

Коэффициенты сноса $\alpha^{(s)}(y, t)$ для рассматриваемых структур разные:

$$\alpha^{(1)}(y, t) = -\frac{k+1}{T} y + \frac{x_0}{T}, \quad \alpha^{(2)}(y, t) = -\frac{1}{T} y + \frac{k}{T} x_0.$$

Нормированные функции плотности вероятности $f^{(1)}(y, t)$ и $f^{(2)}(y, t)$ удовлетворяют уравнениям типа (8.22):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^{(1)}(y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y} \pi^{(1)}(y, t) - \beta^{(21)}(y, t) + \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \gamma^{(12)}(y, t) + \\ &\quad + \left[\beta_p^{(21)}(t) - \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} \gamma_p^{(12)}(t) \right] f^{(1)}(y, t), \\ \frac{\partial f^{(2)}(y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y} \pi^{(2)}(y, t) - \beta^{(12)}(y, t) + \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \gamma^{(21)}(y, t) + \\ &\quad + \left[\beta_p^{(12)}(t) - \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}} \gamma_p^{(21)}(t) \right] f^{(2)}(y, t),\end{aligned}$$

где $\beta_p^{(21)}(t)$, $\beta_p^{(12)}(t)$, $\gamma_p^{(12)}(t)$, $\gamma_p^{(21)}(t)$ определяется по формулам (8.24). Функции $p^{(1)}(t)$ и $p^{(2)}(t)$ находятся из уравнения (8.20):

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} &= -p^{(1)}(\beta_p^{(21)}(t) + \gamma_p^{(12)}(t)) + \gamma_p^{(12)}(t), \quad p^{(1)}(t_0) = p_0^{(1)}, \quad p^{(2)} = \\ &= 1 - p^{(1)}.\end{aligned}$$

Приближенное интегрирование уравнений для плотностей вероятностей проведем на основании двухмоментной гауссовской аппроксимации. Функции $f^{(1)}(y, t)$ и $f^{(2)}(y, t)$ запишем в такой форме:

$$\begin{aligned}f^{(1)}(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_1(t)}} \exp \left[-\frac{(y-m_1)^2}{2\theta_1} \right], \quad f^{(2)}(y, t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2(t)}} \exp \left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\theta_2} \right].\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$m_1 = m_y^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} y f^{(1)}(y, t) dy, \quad m_2 = m_y^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} y f^{(2)}(y, t) dy,$$

$$\begin{aligned}\theta_1 = \theta_{11}^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_1)^2 f^{(1)}(y, t) dy, \quad \theta_2 = \theta_{11}^{(2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_2)^2 f^{(2)}(y, t) dy\end{aligned}$$

Уравнения для вероятностных моментов $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$ типа (3.92), (3.94) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= -\frac{k+1}{T} m_1 + \frac{x_0}{T} - r_{21} + \frac{1-p^{(1)}}{p^{(1)}} r_{12} - \left(\beta_p^{(21)} - \gamma_p^{(12)} \frac{1-p^{(1)}}{p^{(1)}} \right) m_1, \\ \dot{m}_2 &= -\frac{1}{T} m_2 + \frac{x_0}{T} - r_{12} + \frac{p^{(1)}}{1-p^{(1)}} r_{21} - \left(\beta_p^{(12)} - \gamma_p^{(21)} \frac{p^{(1)}}{1-p^{(1)}} \right) m_2, \\ \dot{\theta}_1 &= -\frac{2(k+1)}{T} \theta_1 + \frac{k^2}{T^2} G - s_{21} + \frac{1-p^{(1)}}{p^{(1)}} s_{12} - \left(\beta_p^{(21)} - \gamma_p^{(12)} \frac{1-p^{(1)}}{p^{(1)}} \right) \theta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{2}{T} \theta_2 + \frac{k^2}{T^2} G - s_{12} + \frac{p^{(1)}}{1-p^{(1)}} s_{21} - \left(\beta_p^{(12)} - \gamma_p^{(21)} \frac{p^{(1)}}{1-p^{(1)}} \right) \theta_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r_{21} &= \left(-\frac{k+1}{T} \Delta_0^2 + \frac{x_0}{T} \Delta_0 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\Delta_0 - m_1}{\theta_1} \right) f^{(1)}(\Delta_0, t) + \\ &+ \left(-\frac{k+1}{T} \Delta_0^2 + \frac{x_0}{T} \Delta_0 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\Delta_0 + m_1}{\theta_1} \right) f^{(1)}(-\Delta_0, t); \\ r_{12} &= v \left[\Phi \left(\frac{\Delta - m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) + \Phi \left(\frac{\Delta + m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) \right] m_2 + \\ &+ v \frac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\Delta + m_2)^2}{2\theta_2} \right] - \exp \left[-\frac{(\Delta - m_2)^2}{2\theta_2} \right] \right\}; \\ s_{21} &= (\Delta_0 - m_1)^2 \left(-\frac{k+1}{T} \Delta_0 + \frac{x_0}{T} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\Delta_0 + m_1}{\theta_1} \right) f^{(1)}(-\Delta_0, t); \\ s_{12} &= v \theta_2 \left\{ \Phi \left(\frac{\Delta - m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) + \Phi \left(\frac{\Delta + m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) - \right. \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\Delta - m_2}{\sqrt{\theta_2}} \exp \left[-\frac{(\Delta - m_2)^2}{2\theta_2} \right] + \frac{\Delta + m_2}{\sqrt{\theta_2}} \exp \left[-\frac{(\Delta + m_2)^2}{2\theta_2} \right] \right\} \Bigg\}; \\ \beta_p^{(21)} &= \left(-\frac{k+1}{T} \Delta_0 + \frac{x_0}{T} + \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\Delta_0 - m_1}{\theta_1} \right) f^{(1)}(\Delta_0, t) + \\ &+ \left(\frac{k+1}{T} \Delta_0 + \frac{x_0}{T} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{T^2} G \frac{\Delta_0 + m_1}{\theta_1} \right) f^{(1)}(-\Delta_0, t); \\ \gamma_p^{(12)} &= v \left[\Phi \left(\frac{\Delta - m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) + \Phi \left(\frac{\Delta + m_2}{\sqrt{\theta_2}} \right) \right].\end{aligned}$$

Начальные условия при $t_0 = 0$ для дифференциальных уравнений следующие: $m_{10}, m_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}$.

Выписанные уравнения для $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2, p^{(1)}$ были проинтегрированы при $x_0 = 0; v = 1; \Delta_0 = 0,2; \Delta = 0,5; k = 2; T = 0,5$ с и различных уровнях шума: $G = 0,1; 0,5; 0,75$.

Начальные условия при интегрировании уравнений приняты такими: $p^{(1)} = 0,94; m_{10} = 0; m_{20} = 0; \theta_{10} = 0,01; \theta_{20} = 0,0001$.

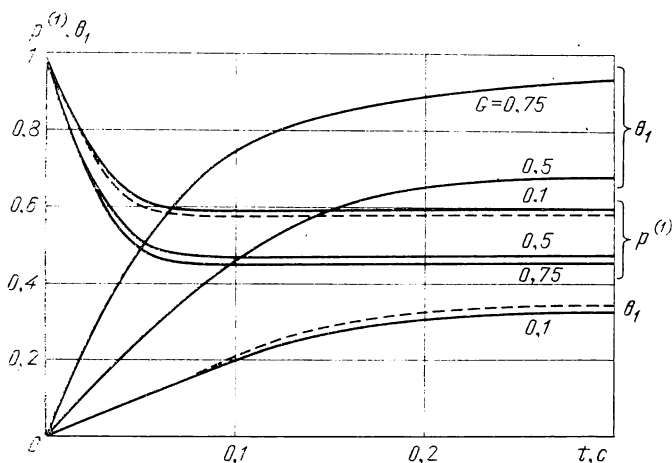


Рис. 8.7. Вероятностные характеристики первой структуры

На рис. 8.7 приведены зависимости $p^{(1)}(t), \theta_1(t)$ при различных G .

Для этого же примера системы стабилизации были проведены вычисления тех же величин с учетом моментов высших порядков (до шестого) при аппроксимации функций плотностей вероятностей $f^{(1)}(y, t)$ и $f^{(2)}(y, t)$ отрезком ортогонального ряда на основе гауссовского в нулевом приближении [25]. Результаты расчетов в рассматриваемом случае практически совпадают, что подтверждает возможность использования гауссовской аппроксимации.

§ 8.4. Системы с переменной структурой управления

Автоматические системы с переменной структурой управляющего устройства содержат нелинейные звенья в виде так называемых *логических переключающих элементов* — ψ -ячеек. Эти нелинейные элементы определяют переменную структуру управляющего устройства и обеспечивают специфический характер процесса управления, называемый *скользящим режимом*. При таком режиме движения изображающая точка системы в фазовом пространстве находится вблизи некоторой гиперплоскости S ,

определяемой уравнением [19, 20]

$$\sum_{i=1}^m c_i y_i = 0, \quad c_i = \text{const}, \quad (8.32)$$

где y_i — фазовые координаты N -мерной системы, $m \leq N - 1$.

Логический элемент — ψ -ячейка — изображен на рис. 8.8. Этот элемент скачком изменяет (переключает) коэффициент усиления в цепи управления. Уравнение ψ -ячейки следующее:

$$u_i = \psi_i(y_i g) = \begin{cases} l_{1i} y_i, & y_i g > 0, \\ l_{2i} y_i, & y_i g < 0, \end{cases} \quad (8.33)$$

где u_i — выходной управляющий сигнал; $y_i = \Phi_i(p)y$, $g = Q(p)y$; l_{1i} , l_{2i} — коэффициенты усиления переключаемой цепи управления; y_i — переключаемый сигнал; g — сигнал переключения;

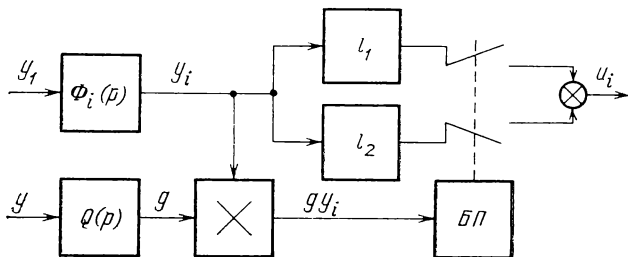


Рис. 8.8. Элементарная ψ -ячейка

БП — блок переключения (реле); $\Phi_i(p)$ и $Q(p)$ — операторы, формирующие сигналы y_i , g . Уравнение (8.33) и структура ψ -ячейки (см. рис. 8.8) выражают тот факт, что в цепи сигнала коэффициент усиления меняется скачком в тот момент, когда изменяет знак произведение $y_i g$. Элементарные нелинейные звенья (ψ -ячейки) имеют два входа. На один подается переключаемый сигнал, на второй — управляющий. Выходной сигнал ψ -ячейки и управляющего устройства в целом имеет разрывы первого рода в силу переключения коэффициентов усиления. Однако для этих элементов характерным является свойство инвариантности к масштабу входного сигнала:

$$u_i(l y_i) = l u_i(y_i).$$

Любая система с переменной структурой управляющего устройства может быть построена с помощью соответствующего набора типовых элементарных нелинейных звеньев. На рис. 8.9 изображена одна из общих структурных схем с $N - 1$ элементарным нелинейным звеном [20].

Уравнения функционирования данной системы имеют вид

$$\begin{aligned} R(p)z &= k(u + x), \quad u = \sum_{j=1}^{N-1} u_j, \\ u_j &= \psi_j(y_j g), \quad y_j = p^{j-1} y, \\ y &= f - z, \quad g = Q(p)y, \end{aligned} \quad (8.34)$$

где $R(p) = \sum_{h=1}^N a_h p^{(h-1)}$; $Q(p) = \sum_{v=1}^N c_v p^{(v-1)}$; $p = \frac{d}{dt}$; f — детерминированный, а $x(t)$ — случайный внешние сигналы.

Все нелинейные звенья, характеризующиеся зависимостями $\psi_j(y, g)$, идентичны и отличаются только коэффициентами усиления в цепях переключения. Уравнения (8.34) можно записать

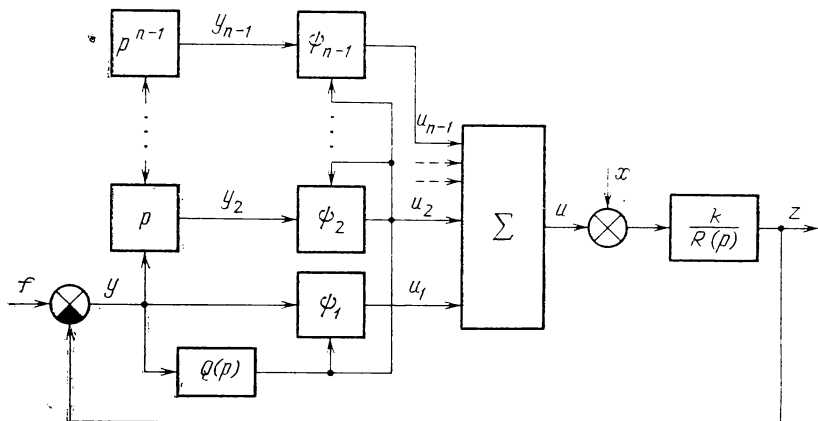


Рис. 8.9. Схема системы с $N - 1$ звеном переменной структуры

также в другой форме, используя представление о фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad u = \sum_{v=1}^{N-1} \psi_v(y_v g), \quad g = \sum_{v=1}^N c_v y_{v-1}, \\ \dot{y}_N &= - \sum_{h=1}^{N-1} \frac{a_h}{a_N} y_h + \frac{k}{a_N} (u + x) - \sum_{h=1}^N \frac{a_h}{a_N} f^{(h)}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Если $x(t) = \xi(t)$ — гауссовский белый шум, то уравнения (8.35) принадлежат к типу (1.1). Если $x(t)$ — небелый шум, то с помощью уравнений формирующего фильтра, выражая $x(t)$ через белый шум $\xi(t)$, уравнения (8.35) также приводятся к (1.1).

Переключение каждого нелинейного элемента, входящего в рассматриваемую систему, по существу, создает новую структуру системы. Таким образом, уравнения (8.34) и (8.35) содержат в обобщенном виде все структуры, свойственные рассматриваемому техническому устройству. Можно перенумеровать все структуры и для каждой из них записать систему уравнений. Из изложенного следует, что рассматриваемая система с переменной структурой управляющего устройства является мультиструктурной. Число возможных структур равно $n = 2^{N-1}$, где $N - 1$ — число элементарных ψ -ячеек. Можно также рассматривать данную динамическую систему как имеющую единую струк-

туру со сложным нелинейным управляющим устройством, обеспечивающим нелинейный закон управления.

Движение в системе с переменной структурой управляющего устройства состоит из этапа вхождения в режим скольжения и этапа скользящего движения с переключением, когда изображающая точка фазовой траектории находится вблизи гиперплоскости переключения [19, 20]. Если параметры звеньев с переменной структурой l_{i1} , l_{i2} , c_i выбраны таким образом, что выполняются условия скользящего режима, то движение системы без возмущений происходит вблизи гиперплоскости S .

При наличии случайных возмущений в рассматриваемых системах возможны срывы скользящего режима переключения. Вместе с тем при наличии случайных возмущений эти системы способны в основном выполнять свое назначение, но с иным качеством. Однако действие помех на системы рассматриваемого типа, обладающие нелинейностями, проявляется сложно. С одной стороны, так же как в линейных системах, они приводят к дополнительным погрешностям при воспроизведении заданного сигнала, а с другой стороны, вызывают изменения статистических и динамических свойств системы и могут приводить к паразитным движениям. Так как практически все системы работают в условиях помех, то задача вероятностного анализа их актуальна.

§ 8.5. Вероятностный анализ систем с переменной структурой управления

Вероятностный анализ систем с переменной структурой управления можно проводить на основе развитой теории систем со случайной сменой структуры. Изменение структуры системы при этом интерпретируется как полное поглощение реализаций случайного процесса, характеризующего предыдущее состояние. Обратный переход в предыдущее состояние, к предыдущей структуре можно рассматривать как восстановление реализаций соответствующего случайного процесса. Для формального описания этих процессов перехода воспользуемся функциями поглощения и восстановления в виде (3.56), (3.57) или матричными функциями (3.62), (3.64).

В рассматриваемых системах перестройка структуры происходит путем переключения коэффициентов усиления на гиперплоскости S , определяемой уравнением (8.32). Функция поглощения $\beta(y, s, t)$ в s -м состоянии в соответствии с (3.57) имеет компоненты

$$\beta^{(rs)}(y, t) = (n_r^0 \cdot \pi^{(s)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) \quad (r, s = \overline{1, n}; r \neq s). \quad (8.36)$$

Полная функция поглощения в s -м состоянии следующая:

$$\beta(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \beta^{(rs)}(y, t) p^{(s)}(t). \quad (8.37)$$

Полная функция восстановления в s -м состоянии есть

$$\gamma(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \gamma^{(sr)}(y, t) p^{(r)}(t) \quad (8.38)$$

с компонентами вида

$$\gamma^{(sr)}(y, t) = (n_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right). \quad (8.39)$$

Матричные функции поглощения и восстановления в данной задаче полноразмерные и связаны тем же соотношением $\Gamma^*(y, t) = B^*(y, t)$.

Функции плотностей вероятностей $f^{(s)}(y, t)$ для рассматриваемой системы также подчинены условным нормированным обобщенным уравнениям Фоккера — Планка — Колмогорова типа (3.89):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(s)}(y, t)}{\partial t} = & -\operatorname{div} \pi^{(s)}(y, t) - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} f^{(s)}(y, t) - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \left[(n_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(y, t)) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} (n_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(y, t)) \right] \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) \quad (s = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Вероятность s -го состояния определяем из уравнений вида (3.81):

$$\dot{p}^{(s)} = -p^{(s)} \sum_{r=1 \neq s}^n \beta_p^{(rs)}(t) + \sum_{r=1 \neq s}^n p^{(r)} \gamma_p^{(sr)}(t), \quad (8.41)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_p^{(rs)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (n_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) dy, \\ \gamma_p^{(sr)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (n_{sr}^0 \cdot \pi^{(s)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) dy. \end{aligned}$$

Выписанные уравнения вместе с формулами для вектора плотности потока вероятности $\pi^{(s)}(y, t)$ позволяют провести теоретико-вероятностный анализ систем с переменной структурой управления, рассматривая каждую структуру отдельно и взаимные переходы между ними.

Общий алгоритм решения задачи связан с интегрированием уравнений в частных производных (8.40). Практическое инженерное значение имеют приближенные методы, основывающиеся на аппроксимации функций плотностей вероятности распределения фазовых координат, т. е. на их представлении формулами через ограниченное число вероятностных моментов — как правило, двух моментов: вектора математического ожидания и корреля-

ляционной матрицы фазовых координат. Наиболее употребительной является гауссовская аппроксимация. Задача при этом решается с точностью до определения первых двух вероятностных моментов фазовых координат процесса (см. гл. 4). Для составления уравнений, определяющих вероятностные моменты при наличии нелинейностей, широко применяется метод статистической линеаризации.

Следует отметить, что при линейных объектах управления и управляющем устройстве, построенном на базе элементарных ψ -ячеек, уравнения, описывающие поведение системы рассматриваемого типа, в каждом s -м состоянии линейны. Следовательно, для их анализа достаточно применения линейной теории, а сами уравнения для моментов являются точными. При таком анализе из уравнений (8.40) получаем уравнения для вектора математического ожидания $\mathbf{m}^{(s)}$ и корреляционной матрицы $\Theta^{(s)}$ в каждой s -й структуре:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} (\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) \operatorname{grad}_{\mathbf{y}} \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} \left[(\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t)) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} (\mathbf{n}_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t)) \right] \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) d\mathbf{y} - \\ & - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} \mathbf{m}^{(s)}, \quad (8.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(s)} = & \int_{-\infty}^{\infty} (\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) \operatorname{grad}_{\mathbf{y}} (\mathbf{y}^0 \mathbf{y}^{0T})) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\mathbf{n}_{rs}^0 \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{y}, t)) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} (\mathbf{n}_{sr}^0 \cdot \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t)) \right] \delta \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) \times \\ & \times (\mathbf{y}^0 \mathbf{y}^{0T}) d\mathbf{y} - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} \Theta^{(s)}, \quad (8.43) \end{aligned}$$

где $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y} - \mathbf{m}^{(s)}$; $s = \overline{1, n}$.

Начальные условия: $\mathbf{m}^{(s)}(t_0)$, $\Theta^{(s)}(t_0)$. Уравнения (8.41) — (8.43) являются замкнутыми и должны интегрироваться совместно.

При большом числе ψ -ячеек в устройстве управления и, следовательно, при большом числе структур (более двух, т. е. более одной ψ -ячейки) рассматриваемый общий путь анализа громоздок. Здесь возможен другой подход, основывающийся на рассмотрении всей совокупности структур как единой системы с нелинейным управляющим устройством, имеющим ψ -ячейки переключения. Такой подход оправдывается важной особенностью функционирования рассматриваемых систем. Эта особенность состоит в том, что при нормальной работе в скользящем режиме

переключения на заданной гиперплоскости система попеременно находится в каждом из возможных состояний малое время. Она пребывает в колебательном режиме переключения вблизи заданной гиперплоскости. Поэтому при анализе системы целесообразно рассматривать ее поведение в целом около этой поверхности переключения, т. е. рассматривать все структуры как единое целое.

С этой целью запишем уравнение для первой безусловной функции плотности вероятности $f(\mathbf{y}, t)$ фазовых координат системы, которая связана с условными функциями $f(\mathbf{y}, s, t)$ для каждого состояния формулой

$$f(\mathbf{y}, t) = \sum_{s=1}^n f(\mathbf{y}, s, t). \quad (8.44)$$

Просуммируем уравнения (8.40) по индексу s . Учитывая (8.44), получим

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \sum_{s=1}^n \pi(\mathbf{y}, s, t) + \sum_{s=1}^n [-\beta(\mathbf{y}, s, t) + \gamma(\mathbf{y}, s, t)]. \quad (8.45)$$

С учетом того что

$$\sum_{s=1}^n \pi(\mathbf{y}, s, t) = \pi(\mathbf{y}, t), \quad \sum_{s=1}^n [-\beta(\mathbf{y}, s, t) + \gamma(\mathbf{y}, s, t)] = 0,$$

уравнение (8.45) приобретает форму

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(\mathbf{y}, t), \quad (8.46)$$

где

$$\operatorname{div} \pi(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial y_k} \pi_k(\mathbf{y}, t).$$

Компоненты $\pi_k(\mathbf{y}, t)$ вектора плотности потока вероятности $\pi(\mathbf{y}, t)$ имеют вид

$$\pi_k(\mathbf{y}, t) = \alpha_k(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial y_l} [D_{kl}(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)]. \quad (8.47)$$

Компоненты $\alpha_k(\mathbf{y}, t)$ вектора сноса и $D_{kl}(\mathbf{y}, t)$ матрицы диффузии для уравнений (8.35) при $\mathbf{x}(t) = \xi(t)$, т. е. при белом шуме, следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_k(\mathbf{y}, t) &= y_{k+1} \quad (k = \overline{1, N-1}), \\ \alpha_N(\mathbf{y}, t) &= -\sum_{h=1}^{N-1} \frac{a_{hN}}{a_N} y_h + \frac{k}{a_N} u - \sum_{h=1}^N \frac{a_{hN}}{a_N} \dot{f}^{(h)}; \end{aligned} \quad (8.48)$$

$$D_{NN}(\mathbf{y}, t) = \frac{k^2}{a_N^2} G_{\xi}, \quad D_{kl}(\mathbf{y}, t) = 0 \quad (k, l \neq N). \quad (8.49)$$

Уравнение (8.46) является нелинейным, если учесть формулы (8.47) — (8.49). При анализе рассматриваемой системы в целом как единой нелинейной на основании уравнения (8.46) следует воспользоваться статистической линеаризацией ψ -ячеек и других нелинейностей для составления уравнений относительно первых двух вероятностных моментов переменных. При таком анализе мультиструктура системы явно не проявляется. Она учитывается в специфике нелинейного управляющего устройства.

После статистической линеаризации нелинейностей на основе двухмоментной аппроксимации функции $f(y, t)$ и, в частности, таких специальных нелинейностей, как ψ -ячейки, составляются уравнения для безусловных моментов — компонентов вектора математического ожидания m и корреляционной матрицы Θ . Получаемая приближенная система уравнений является замкнутой и дает возможность получить количественные характеристики влияния помех на динамические свойства систем с переменной структурой управления.

§ 8.6. Статистическая линеаризация ψ -ячейки

Нелинейная элементарная ψ -ячейка является релейно-мультипликативной. Для дальнейшего изложения перепишем (8.33) в виде

$$u = \begin{cases} l_1 y_1, & y_1 y_2 > 0, \\ l_2 y_2, & y_1 y_2 < 0. \end{cases} \quad (8.50)$$

Зависимость (8.50) представим в более компактной релейно-мультипликативной форме [21, 28]:

$$u = \frac{1}{2} [s_{21} + s_{12} \operatorname{sign}(y_1 y_2)] y_1, \quad (8.51)$$

где

$$s_{12} = l_1 + l_2; \quad s_{21} = l_1 - l_2.$$

Формулу (8.51) удобно представить в виде

$$u = \frac{1}{2} s_{21} y_1 + \frac{1}{2} s_{12} |y_1| \operatorname{sign} y_2. \quad (8.52)$$

Для удобства дальнейших преобразований запишем (8.52) в следующей форме:

$$u = \frac{1}{2} s_{21} y_1 + \frac{1}{2} s_{12} \Phi(y_1, y_2), \quad (8.53)$$

где

$$\Phi(y_1, y_2) = |y_1| \operatorname{sign} y_2.$$

Таким образом, ψ -ячейка является сложным нелинейным элементом с двумя входами: преобразуемого основного сигнала y_1 и вспомогательного сигнала y_2 . Выходной сигнал имеет две составляющих: линейную и нелинейную по преобразуемому сигналу

y_1 . Нелинейность представляет собой мультипликативную функцию модуля y_1 и сигнатуры y_2 .

Произведем статистическую линеаризацию этой нелинейности при случайных входных сигналах y_1 и y_2 .

В силу того, что нелинейность $\varphi(y_1, y_2)$ мультипликативная, следует воспользоваться первым и вторым способами вычисления параметров статистической линеаризации [24, 25]. Нелинейную функцию $\varphi(y_1, y_2)$ (см. (8.53)) представим в виде линеаризованной зависимости

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi_0 + k_1 y_1^0 + k_2 y_2^0. \quad (8.54)$$

Для вычисления параметров статистической линеаризации φ_0 , k_1 , k_2 используем формулы, приведенные в [25, 32].

Статистическая характеристика φ_0 определяется по формуле

$$\varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (8.55)$$

где $f(y_1, y_2)$ — гауссовская функция плотности вероятности.

Коэффициенты усиления k_1 , k_2 в зависимости от способа статистической линеаризации определяются по формулам

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= \left(\frac{D_\varphi}{\theta_{11}} \mu \right)^{1/2} \text{sign } k_1^{(2)}, & k_1^{(2)} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial m_1}, \\ k_2^{(1)} &= \left(\frac{D_\varphi}{\theta_{22}} \mu \right)^{1/2} \text{sign } k_2^{(2)}, & k_2^{(2)} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial m_2}, \end{aligned} \quad (8.56)$$

где

$$D_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \varphi_0^2. \quad (8.57)$$

$$\mu = \left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{\theta_{ij}}{\theta_{ii}\theta_{jj}} \text{sign } k_1^{(2)} \text{sign } k_2^{(2)} \right)^{-1}; \quad (8.58)$$

θ_{ij} ($i, j = 1, 2$) — корреляционный момент связи переменных y_1, y_2 .

При вычислении φ_0 и D_φ функцию $f(y_1, y_2)$ приближенно представим в виде

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{11}}} \exp \left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\theta_{11}} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{22}}} \exp \left[-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\theta_{22}} \right] \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{\theta_{12}}{\theta_{11}\theta_{22}} (y_1 - m_1)(y_2 - m_2) \right]. \end{aligned} \quad (8.59)$$

После вычисления соответствующих интегралов в формулах (8.55), (8.57) получаем [24]

$$\varphi_0 = 4 \sqrt{\theta_{11}} \left[\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \Phi \left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \right) \Phi \left(\frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} \right) + \Phi \left(\frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} \right) e^{-\frac{m_2^2}{2\theta_{22}}} + \right. \\ \left. + \frac{\theta_{12}}{\theta_{11}\theta_{22}} \Phi \left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m_2^2}{2\theta_{22}}} \right], \quad (8.60)$$

$$D_\varphi = m_1^2 + \theta_{11}^2, \quad (8.61)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Подставляя выражения (8.60), (8.61) в формулы (8.56), определим статистические коэффициенты усиления:

$$k_1^{(1)} = \left[\left(\frac{m_1^2}{\theta_{11}} + 1 - \frac{1}{\theta_{11}} \varphi_0^2 \right) \mu \right]^{1/2}, \\ k_2^{(1)} = \left[\left(\frac{m_1^2}{\theta_{22}} + \frac{\theta_{11}}{\theta_{22}} - \frac{1}{\theta_{22}} \varphi_0^2 \right) \mu \right]^{1/2}, \\ \mu = \left(1 + \frac{\theta_{12}}{\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}} \right)^{-2}, \quad (8.62)$$

$$k_1^{(2)} = 4 \left\{ \Phi \left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \right) \Phi \left(\frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} \right) + \frac{\theta_{12}}{\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}} \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{\theta_{11}} + \frac{m_2^2}{\theta_{22}} \right) \right] \right\}, \\ k_2^{(2)} = 4 \frac{\sqrt{\theta_{11}}}{\sqrt{2\pi\theta_{22}}} \left[\Phi \left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \right) \left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} - \frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} \frac{\theta_{12}}{\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{m_1^2}{2\theta_{11}} \right) \right] \exp \left(-\frac{m_2^2}{2\theta_{22}} \right).$$

При статистической линеаризации мультипликативных нелинейностей целесообразно использовать формулы [24, 25, 31]

$$k_1 = \frac{1}{2} (k_1^{(1)} + k_1^{(2)}), \quad k_2 = \frac{1}{2} (k_2^{(1)} + k_2^{(2)}). \quad (8.63)$$

Окончательно нелинейность типа элементарной ψ -ячейки (8.53) в статистически линеаризованном виде следующая:

$$u = \frac{1}{2} s_{21} y_1 + \frac{1}{2} s_{12} \varphi_0(m_1, m_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{22}) + \\ + \frac{1}{2} s_{12} k_1(m_1, m_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{22}) y_1^0 + \frac{1}{2} s_{12} k_2(m_1, m_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{22}) y_2^0. \quad (8.64)$$

Приближенная зависимость (8.64) может быть применена также для описания более сложных нелинейностей, состоящих из параллельно включенных ψ -ячеек. Выходной сигнал сложной нелинейности будет равен сумме выражений типа (8.64).

Воспользовавшись полученными формулами, проанализируем, как ведет себя элементарное звено переменной структуры при различных уровнях полезных сигналов и помех. Полезный сигнал в рассматриваемых системах обычно детерминированный и составляет основную часть математических ожиданий m_1 и m_2 . Помеха центрирована или содержит математическое ожидание, близкое к нулю. Поэтому величины θ_{11} , θ_{12} , θ_{22} характеризуют в основном действие помехи.

Рассмотрим крайние режимы функционирования при помехах. Предположим, что выполняются условия, когда отношение сигнал/шум мало, т. е. величины $m_1/\sqrt{\theta_{11}}$, $m_2/\sqrt{\theta_{22}}$ являются малыми первого порядка.

Тогда

$$\Phi\left(\frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}}, \quad \Phi\left(\frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}}, \quad e^{-\frac{m_2^2}{2\theta_{22}}} \approx 1.$$

Из формул (8.60) — (8.64) получим с точностью до величин первого порядка малости:

$$m_u = \frac{1}{2} s_{21} m_1 + \frac{s_{12} \sqrt{\theta_{11}}}{\pi} \left(\frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} + \frac{\theta_{12}}{\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}} \frac{m_1}{\sqrt{\theta_{11}}} \right), \quad (8.65)$$

$$u^0 = \frac{1}{2} s_{21} y_1^0 + \frac{1}{4} s_{12} \left[\left(\frac{\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}}{2\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}} + \theta_{12}} \right)^{1/2} + \frac{2\theta_{12}}{\pi\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}} \right] y_1^0 + \\ + \frac{1}{4} s_{12} \left\{ \left[\frac{\theta_{12}\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}}}{2\theta_{22}(\sqrt{\theta_{11}\theta_{22}} + \theta_{22})} \right]^{1/2} + \frac{\sqrt{\theta_{11}}}{\pi\sqrt{\theta_{22}}} \right\} y_2^0. \quad (8.66)$$

Из формул (8.65), (8.66) следует, что нелинейное преобразование, осуществляемое элементарным нелинейным звеном переменной структуры, при малых отношениях сигнал/шум $m_1/\sqrt{\theta_{11}}$, $m_2/\sqrt{\theta_{22}}$ стало линейным по математическому ожиданию и по случайным составляющим. При линейной зависимости выходного и входного полезных сигналов в управляющем устройстве отсутствуют условия существования скользящего режима в рассматриваемой системе [21, 28]. Таким образом, при высоком уровне шума скользящий режим в системе отсутствует, система в среднем функционирует как линейная, а устойчивость и точность в начале координат могут быть оценены методами линейной теории.

Другой крайний режим движения существует в системе, когда отношения сигнал/шум на входе нелинейного элемента велики, т. е. $m_1/\sqrt{\theta_{11}}$ и $m_2/\sqrt{\theta_{22}}$ имеют большие значения. На основании формул (8.60) — (8.64) для выходного сигнала управления в

рассматриваемом режиме получаем [21, 28]

$$m_u = \frac{1}{2} s_{21} \dot{m}_1 + \frac{1}{2} s_{12} |m_1| \operatorname{sign} m_2, \quad (8.67)$$

$$u^0 = \frac{1}{2} s_{21} y_1^0 + \frac{1}{4} s_{12} \left[\left(\frac{\sqrt{\theta_{11} \theta_{22}}}{2 \sqrt{\theta_{11} \theta_{22} + \theta_{22}}} \right)^{1/2} \operatorname{sign}(m_1 m_2) \right] y_1^0. \quad (8.68)$$

Формула (8.67) повторяет закон управления с переключением, т. е. уравнение ф-ячейки, но только для математических ожиданий. Следовательно, в среднем статистическом здесь сохраняется необходимое условие существования скользящего режима на гиперплоскости переключения. Скользящий режим в системе существует, но имеется помеха в управляющем сигнале, пропорциональная помехе в переключаемом сигнале.

Практически важным является также режим работы системы, когда помехи малы в канале переключаемого сигнала y_1 , но велики в канале переключения y_2 . Это может быть, например, тогда, когда переключающий сигнал y_2 формируется дифференцированием сигнала y_1 . В рассматриваемом режиме $\sqrt{\theta_{11}}$ и θ_{12} малы, $\sqrt{\theta_{22}}$ велик и $m_2/\sqrt{\theta_{22}}$ мало. На выходе элементарного нелинейного звена по формулам (8.60) — (8.64) получаем

$$m_u = \frac{1}{2} s_{21} m_1 + s_{12} |m_1| \frac{m_2}{\sqrt{\theta_{22}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (8.69)$$

$$u^0 = \frac{1}{2} s_{21} y_1^0 + \frac{1}{4} s_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{\theta_{11}} - 1 \right) \right]^{1/2} y_1^0 + s_{12} \frac{|m_1|}{\sqrt{2\pi\theta_{22}}} y_2^0. \quad (8.70)$$

Такой режим возможен вблизи гиперплоскости переключения. В среднем статистическом в системе существует скользящий режим.

Если рассматриваемое звено переменной структуры является симметричным, т. е. $l_1 = -l_2$, то при выполнении условия $m_2/\sqrt{\theta_{22}} \rightarrow 0$ получим из (8.69) $m_u = 0$. Это означает, что полезный сигнал на выходе управляющего звена переменной структуры равен нулю. Эффективность управления в условиях помех падает до нуля, и автоматическая система размыкается.

Линеаризованные зависимости для элементарных нелинейных звеньев переменной структуры, полученные с помощью статистической линеаризации, могут быть использованы при вероятностном анализе замкнутых систем с перестраиваемым управлением, работающих в условиях помех.

§ 8.7. Система с одним звеном переменной структуры управления

Рассмотрим систему достаточно общего вида с одним элементарным звеном переменной структуры управления и линейным объектом. Уравнения функционирования системы с учетом

помех запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki}(t) y_i + h_k(t) \xi_k(t) \quad (k = \overline{1, N-2}), \\ \dot{y}_{N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i}(t) y_i + h_{N-1}(t) \xi_{N-1}(t) - u, \\ u &= \begin{cases} l_1 y_1, & y_1 y_N > 0, \\ l_2 y_2, & y_1 y_N < 0, \end{cases} \quad y_N = \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i, \end{aligned} \quad (8.71)$$

где $\xi_k(t)$ ($k = \overline{1, N-1}$) — гауссовские белые шумы (помехи), имеющие математические ожидания $m_{\epsilon_k}(t)$ и матрицу интенсивностей $G(t)$.

Система в начальный момент находится в некотором начальном состоянии $y_k(t_0) = y_{k0}$ ($k = \overline{1, N-1}$), характеризуемом вектором математического ожидания m_0 и корреляционной матрицей Θ_0 . Эта система имеет две структуры в соответствии с тем, что в цепи управления применено одно звено переменной структуры с двумя значениями коэффициента усиления l_1 и l_2 . Изменение структуры системы происходит на гиперповерхности переключения, уравнение которой следующее:

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i = 0. \quad (8.72)$$

Эта гиперплоскость делит фазовое пространство на две области W_1 и W_2 в соответствии с условиями

$$y_1 \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i > 0, \quad y_1 \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i < 0.$$

Используя представление о двух структурах, можно записать уравнения (8.71) так:

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki}(t) y_i + h_k(t) \xi_k(t) \quad (k = \overline{1, N-2}), \\ \dot{y}_{N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i}(t) y_i + h_{N-1}(t) \xi_{N-1}(t) - l_s y_1 \quad (s = 1, 2). \end{aligned} \quad (8.73)$$

Смена структур происходит при достижении фазовыми координатами системы гиперплоскости переключения (8.72). На этой поверхности происходит поглощение реализаций одного процесса и восстановление другого. Функции поглощения и восстановления реализаций случайных процессов для рассматриваемой системы в соответствии с формулами (8.36), (8.39) следующие:

$$\begin{aligned} \beta^{(21)}(y, t) &= (n_1^0 \cdot \pi^{(1)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right), \\ \gamma^{(12)}(y, t) &= (n_2^0 \cdot \pi^{(2)}(y, t)) \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right), \\ \beta^{12}(y, t) &= \gamma^{12}(y, t), \quad \gamma^{21}(y, t) = \beta^{21}(y, t), \end{aligned} \quad (8.74)$$

где $\mathbf{n}_1^0$ — единичный вектор внешней нормали к W_1 ; $\mathbf{n}_2^0$ — единичный вектор внешней нормали к W_2 . Очевидно, что $\mathbf{n}_1^0 = -\mathbf{n}_2^0$.

Для рассматриваемой двухструктурной системы плотности вероятностей распределения фазовых координат в каждом состоянии удовлетворяют уравнениям типа (8.14).

Векторы плотности потоков вероятности выражаются формулами (8.15) через векторы сноса $\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и матрицы диффузии $D^{(s)}(\mathbf{y}, t)$. Компоненты $\alpha_k^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ вектора сноса по координатным осям в соответствии с уравнениями (8.73) следующие:

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki}(t) y_i + h_k(t) m_{\xi_k}(t) \quad (k = \overline{1, N-2}), \\ \alpha_{N-1}^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i}(t) y_i + h_{N-1}(t) m_{\xi_{N-1}} - l_s y_1.\end{aligned}\quad (8.75)$$

Компоненты $D_{kp}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ матрицы диффузии по координатным осям выражаются формулами

$$D_{kp}^{(s)}(\mathbf{y}, t) = h_k(t) h_p(t) G_{kp}(t) \quad (k, p = \overline{1, N-1}). \quad (8.76)$$

Уравнения вероятностей состояний $p^{(1)}, p^{(2)}$ для данной двухструктурной системы имеют вид (8.20), где $\beta_p^{(rs)}(t)$ и $\gamma_p^{(sr)}(t)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\beta_p^{(21)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n}_1^0 \cdot \pi^{(1)}(y_1, y_2, \dots, y_N)) \delta\left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i\right) dy, \\ \gamma_p^{(12)}(t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n}_1^0 \cdot \pi^{(2)}(y_1, y_2, \dots, y_N)) \delta\left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i\right) dy.\end{aligned}\quad (8.77)$$

Уравнения (8.73), описывающие функционирование системы в каждом состоянии, линейные. Ограничимся гауссовским приближением для функции $f^{(s)}(\mathbf{y}, t)$. Тогда следует определить только вероятностные моменты первого $\mathbf{m}^{(s)}$ и второго $\Theta^{(s)}$ порядков. Выпишем эти уравнения в координатной форме.

Для компонентов вектора математического ожидания имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{m}_k^{(s)} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki} m_i^{(s)} + h_k m_{\xi_k} - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - m_k^{(s)}) \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \delta\left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i\right) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{N-1}^{(s)} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i} m_i^{(s)} + h_{N-1} m_{\varepsilon_{N-1}} - l_s m_1^{(s)} - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y_{N-1} - m_{N-1}^{(s)}) \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right) d\mathbf{y} \\ &\quad (k = \overline{1, N-2}; s = 1, 2). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Для компонентов корреляционной матрицы уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{kp}^{(s)} &= \sum_{i=1}^{N-1} (d_{ki} \theta_{pi}^{(s)} + d_{pi} \theta_{ki}^{(s)}) + h_k h_p G_{kp} - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y_k^0 y_p^0 - \theta_{kp}^{(s)}) \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right) d\mathbf{y}, \\ \dot{\theta}_{k N-1}^{(s)} &= \sum_{i=1}^{N-1} (d_{ki} \theta_{i N-1}^{(s)} + d_{N-1 i} \theta_{ik}^{(s)}) + h_k h_{N-1} G_{k N-1} - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y_k^0 y_{N-1}^0 - \theta_{k N-1}^{(s)}) \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \times \\ &\quad \times \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right) d\mathbf{y}, \quad (8.79) \\ \dot{\theta}_{N-1 N-1}^{(s)} &= 2 \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i} \theta_{i N-1}^{(s)} + h_{N-1}^2 G_{N-1 N-1} - 2 l_s^2 \theta_{1 N-1}^{(s)} - \\ &- \sum_{r=1 \neq s}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [(y_{N-1}^0)^2 - \theta_{N-1 N-1}^{(s)}] \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(s)}(\mathbf{y}, t) - \frac{p^{(r)}}{p^{(s)}} \pi^{(r)}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \times \\ &\quad \times \delta \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i \right) d\mathbf{y} \\ &\quad (k, p = \overline{i, N-2}; s = 1, 2). \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (8.20), (8.78), (8.79) при заданных начальных условиях, определяем вероятности $p^{(s)}$ и условные моменты $m_k^{(s)}$, $\theta_{kp}^{(s)}$ ($s = 1, 2$; $k, p = \overline{1, N-1}$). Безусловные моменты определяются по формулам (3.95)–(3.97).

Изложенная процедура статистического анализа дает возможность определить вероятностные характеристики системы с переменной структурой управления. Вероятности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ оценивают пребывание системы в первом или втором состоянии. Если $p^{(1)} = p^{(2)} = 1/2$, то скользящий режим в системе проявляется полностью. При нарушении этого условия в ту или другую сторону скользящий режим в системе не реализуется.

Данную систему можно также рассматривать как одноструктурную с нелинейным управляющим устройством. Тогда следует

уравнения ее движения привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{y}_k &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki} y_i + h_k \xi_k \quad (k = \overline{1, N-2}), \\ \dot{y}_{N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i} y_i + h_{N-1} \xi_{N-1} - u, \\ u &= \frac{1}{2} s_{21} y_1 + \frac{1}{2} s_{12} |y_1| \operatorname{sign} y_N, \\ y_N &= \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i, \quad s_{12} = l_1 - l_2, \quad s_{21} = l_1 + l_2.\end{aligned}\tag{8.80}$$

Статистическая динамика этой системы описывается функцией плотности вероятности $f(y, t)$, удовлетворяющей уравнению (8.46). Приближенное решение этого уравнения, дающее возможность проанализировать основные закономерности статистической динамики и синтезировать помехоустойчивые системы с переменной структурой управления, основывается на гауссовской аппроксимации функции $f(y, t)$. Практически указанное приближение сводится к тому, что в уравнениях (8.80) применяется статистическая линейаризация нелинейной функции управления. Затем для линейаризованной системы составляются уравнения для математических ожиданий и корреляционных моментов переменных.

Воспользовавшись формулой (8.64), произведем статистическую линейаризацию нелинейной функции u в уравнениях (8.80). В результате эти уравнения принимают такую форму:

$$\begin{aligned}\dot{y}_k &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki} y_i + h_k \xi_k, \\ \dot{y}_{N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i} y_i + h_{N-1} \xi_{N-1} - \frac{1}{2} s_{21} y_1 - \frac{1}{2} s_{12} \varphi_0 - \frac{1}{2} s_{12} h_1 y_1^0 - \frac{1}{2} s_{12} h_2 y_2^0, \\ y_N &= \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i.\end{aligned}\tag{8.81}$$

На основании линейных уравнений (8.80) стандартным приемом получаем соответственно уравнения для математических ожиданий

$$\begin{aligned}\dot{m}_k &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{ki} m_i + h_k m_k^{\xi} \quad (k = \overline{1, N-2}), \\ \dot{m}_{N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} d_{N-1 i} m_i + h_{N-1} m_{N-1}^{\xi} - \frac{1}{2} s_{21} m_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} s_{12} \varphi_0 (m_1, m_N, \theta_{11}, \theta_{1N}, \theta_{NN}), \\ m_N &= \sum_{i=1}^{N-1} c_i m_i\end{aligned}\tag{8.82}$$

и для корреляционных моментов

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{kp} &= \sum_{i=1}^{N-1} (d_{ki}\theta_{ip} + d_{pi}\theta_{ik}) + h_k h_p G_{kp} \quad (k, p = \overline{1, N-2}), \\ \dot{\theta}_{kN-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} (d_{ki}\theta_{iN-1} + d_{N-1i}\theta_{ik}) + h_k h_{N-1} G_{kN-1} - \frac{1}{2} s_{21}\theta_{1k} - \\ &- \frac{1}{2} s_{12}[k_1(m_1, m_N, \theta_{11}, \theta_{1N}, \theta_{NN})\theta_{1k} + k_2(m_1, m_N, \theta_{11}, \theta_{1N}, \theta_{NN})\theta_{N-1k}], \\ \dot{\theta}_{N-1N-1} &= \sum_{i=1}^{N-1} (d_{N-1i}\theta_{iN-1} + d_{N-1i}\theta_{iN-1}) + h_{N-1}^2 G_{N-1N-1} - \\ &- s_{21}\theta_{1N-1} - s_{12}[k_1(m_1, m_N, \theta_{11}, \theta_{1N}, \theta_{NN})\theta_{1N-1} + \\ &\quad + k_2(m_1, m_N, \theta_{11}, \theta_{1N}, \theta_{NN})\theta_{2N-1}], \\ \theta_{NN} &= \sum_{i,j=1}^{N-1} c_i c_j \theta_{ij}.\end{aligned}\tag{8.83}$$

Интегрированием этих уравнений при заданных начальных условиях определяются все вероятностные моменты переменных. Они дают возможность выявить режимы потери устойчивости по полезному сигналу, оценить точность работы в условиях помех

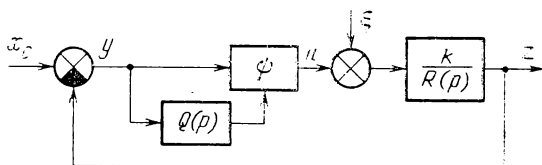


Рис. 8.10. Схема системы с одной ф-чейкой

и провести полный анализ поведения системы. Конкретные исследования [21] систем подобного вида показывают, что случайная высокочастотная помеха снижает эффективность управляющего устройства обратно пропорционально отношению сигнал/шум. Может возникнуть систематическая ошибка из-за срыва скользящего режима. Установлено также, что наиболее существенное влияние оказывают помехи, возникающие в каналах переключения.

Рассмотрим более подробно простейшую стационарную систему с одним звеном переменной структуры управления (рис. 8.10), находящуюся под действием сигнала x_0 и стационарной случайной помехи $\xi(t)$ со средним значением $m_\xi = 0$ и спектральной плотностью $s_\xi(\omega)$. Исследуем поведение системы и оценим величину ошибки y .

Уравнения рассматриваемой системы следующие:

$$\begin{aligned}R(p)z &= k(u + \xi), \\ u &= \begin{cases} l_1 y, & yg > 0, & g = Q(p)y, \\ l_2 y, & yg < 0, & y = u_0 - z, \end{cases}\end{aligned}\tag{8.84}$$

где $R(p) = \sum_{i=1}^N a_i p^i$, $Q(p) = \sum_{j=1}^N c_j p^{j-1}$, $p = \frac{d}{dt}$. Проанализируем поведение этой системы вторым методом, т. е. рассматривая обе структуры как единую систему с нелинейным управляющим устройством.

Нелинейную функцию u статистически линеаризуем в соответствии с формулой (8.64), а исходные уравнения (8.84) запишем в форме

$$\begin{aligned} R(p)y &= -k(u + \xi) + R(p)u_0, \\ u &= \frac{1}{2}s_{21}y + \frac{1}{2}s_{12}\varphi_0(m_y, m_g, \theta_{yy}, \theta_{yg}, \theta_{gg}) + \\ &+ \frac{1}{2}s_{12}[(k_1(m_y, m_g, \theta_{yy}, \theta_{yg}, \theta_{gg})y^6 + \\ &+ k_2(m_y, m_g, \theta_{yy}, \theta_{yg}, \theta_{gg})g^6], \quad g = Q(p)y. \end{aligned} \quad (8.85)$$

Предположим, что $u_0 = \text{const}$, и рассмотрим практически важный режим работы системы, когда уровень помехи ξ в канале управления мал, но при формировании сигнала переключения g за счет дифференцирования уровень шума высок. Для такого режима параметры статистической линеаризации определяются формулами (8.69), (8.70):

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= |m_y| \frac{m_g}{\sqrt{2\pi\theta_{gg}}}, \\ k_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_y}{\theta_{yy}} + 1 \right) \right]^{1/2}, \quad k_2 = \frac{2|m_y|}{\sqrt{2\pi\theta_{gg}}}. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Статистически линеаризованные уравнения системы для математического ожидания m_y и для y^0 принимают вид

$$\begin{aligned} \left[R(p) + \frac{ks_{21}}{2} + \frac{ks_{12}|m_g|}{\sqrt{2\pi\theta_{gg}}} Q(p) \right] m_y &= R(p)u_0, \\ \left[R(p) + \frac{ks_{21}}{2} + k_1 \frac{ks_{12}}{2} + k_2 \frac{ks_{12}}{2} Q(p) \right] y^0 &= -k\xi, \\ g^0 &= Q(p)y^0. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Первое из полученных уравнений позволяет оценить устойчивость и систематическую ошибку системы при наличии помех, второе и третье — определить дисперсию ошибки и дисперсию помехи в канале переключения. Так, решение $m_y = 0$ может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от вида корней характеристического уравнения

$$R(\lambda) + \frac{ks_{21}}{2} = 0. \quad (8.88)$$

При действии помехи ξ и сигнала u_0 устойчивость по математическому ожиданию необходимо оценивать на основании

характеристического уравнения

$$R(\lambda) + \frac{ks_{21}}{2} + \frac{ks_{12}|m_y|}{\sqrt{2\pi\theta_{gg}}} Q(\lambda) = 0, \quad (8.89)$$

задавая различные значения m_y и θ_{gg} .

Если система при действии помех устойчива, то в установившемся режиме после завершения переходных процессов для

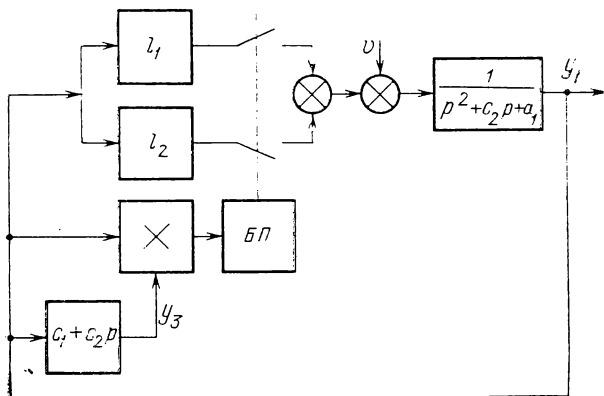


Рис. 8.11. Схема системы стабилизации переменной структуры

оценки систематической ошибки m_y и дисперсии θ_{yy} следует совместно решить следующую систему уравнений:

$$\left[R(0) + \frac{ks_{21}}{2} + \frac{ks_{12}|m_y|}{\sqrt{2\pi\theta_{gg}}} Q(0) \right] m_y = R(0) u_0,$$

$$\theta_{yy} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-k}{R(i\omega) + \frac{ks_{12}}{2} [k_1 + k_2 Q(i\omega)] + k \frac{s_{21}}{2}} \right|^2 s_{\xi}(\omega) d\omega, \quad (8.90)$$

$$\theta_{gg} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-kQ(i\omega)}{R(i\omega) + \frac{ks_{12}}{2} [k_1 + k_2 Q(i\omega)] + k \frac{s_{21}}{2}} \right|^2 s_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Пример 8.2. Система стабилизации с переменной структурой управляющего устройства (рис. 8.11) имеет уравнения

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -a_1 y_1 - a_2 y_2 + \xi - u,$$

$$u = \begin{cases} l_1 y_1, & y_1 y_3 > 0, \\ l_2 y_2, & y_1 y_3 < 0. \end{cases} \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

Начальные условия $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = 0$. В уравнениях $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и постоянны; l_1 , l_2 , a_1 , a_2 — постоянные коэффициенты; $\xi(t)$ — белый шум, имеющий $M[\xi(t)] = 0$ и интенсивность G .

Рассмотрим систему как двухструктурную. Эти структуры реализуются в областях W_1 и W_2 (рис. 8.12) в соответствии с условием $y_1 y_3 > 0$ или $y_1 y_3 < 0$.

Если в системе возможен скользящий режим, то он реализуется вблизи линии переключения

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0.$$

Граница $y_1 = 0$ между областями W_1 и W_2 при таком движении является неустойчивой и фазовые траектории от нее отходят (см. рис. 8.12).

Допустим, что параметры c_1 , c_2 , l_1 , l_2 подобраны так, что в системе обеспечен скользящий режим движения при отсутствии

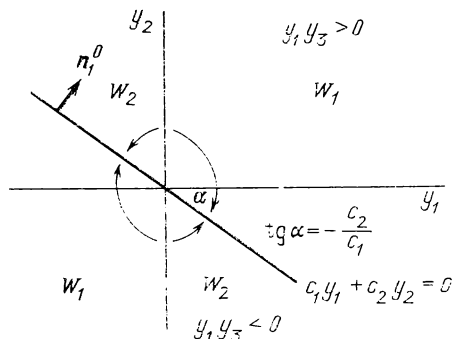


Рис. 8.12. Области W_1 , W_2 и линия переключения

возмущений. Нормаль n_1^0 к линии переключения имеет проекции на координатные оси $y_1^0 \sin \alpha$ и $y_2^0 \cos \alpha$.

Запишем выражения для составляющих векторов плотности потока вероятности для каждой структуры:

$$\pi_1^{(s)} = y_2 f^{(s)}(y, t),$$

$$\pi_2^{(s)} = (-a_1 y_1 - a_2 y_2 - l_s y_1) f^{(s)}(y, t) - \frac{1}{2} G \frac{\partial}{\partial y_2} f^{(s)}(y, t) \quad (s = 1, 2).$$

Уравнения типа (8.20) для вероятностей состояний следующие:

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(1)} = & -p^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} (n_1^0 \cdot [\pi^{(1)}(y, t) + \pi^{(2)}(y, t)]) \delta(c_1 y_1 + c_2 y_2) dy - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} (n_1^0 \cdot \pi^{(2)}(y, t)) \delta(c_1 y_1 + c_2 y_2) dy, \quad p^{(2)} = 1 - p^{(1)}, \quad p^{(1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

При гауссовских функциях $f^{(s)}(y, t)$ ($s = 1, 2$) необходимо составить уравнения для $m_1^{(s)}$, $m_2^{(s)}$, $\theta_{11}^{(s)}$, $\theta_{22}^{(s)}$, $\theta_{12}^{(s)}$. Эти уравнения

на основании (8.78), (8.79) следующие:

$$\dot{m}_1^{(s)} = m_2^{(s)} + \int_{-\infty}^{\infty} h(y_2) \frac{c_2}{c_1} y_2 dy_2 - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} m_1^{(s)},$$

$$\dot{m}_2^{(s)} = -a_1 m_1^{(s)} - a_2 m_2^{(s)} - l_s m_1^{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} h(y_2) y_2 dy_2 - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} m_2^{(s)},$$

$$\dot{\theta}_{11}^{(s)} = 2\theta_{12}^{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} h_2(y_2) \frac{c_2^2}{c_1^2} y_2^2 dy_2 - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} \theta_{11}^{(s)},$$

$$\dot{\theta}_{22}^{(s)} = -2a_1 \theta_{12}^{(s)} - 2a_2 \theta_{22}^{(s)} + G - \int_{-\infty}^{\infty} h(y_2) y_2^2 dy_2 - 2l_s \theta_{12}^{(s)} - \frac{\dot{p}^{(s)}}{p^{(s)}} \theta_{22}^{(s)},$$

$$\dot{\theta}_{12}^{(s)} = \theta_{22}^{(s)} - a_1 \theta_{11}^{(s)} - a_2 \theta_{12}^{(s)} - l_s \theta_{11}^{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} h(y_2) \frac{c_2}{c_1} y_2^2 dy_2,$$

где

$$h(y_2) = \left(\mathbf{n}_1^0 \cdot \left[\pi^{(1)} \left(-\frac{c_2}{c_1} y_2, y_2 \right) - \pi^{(2)} \left(-\frac{c_2}{c_1} y_2, y_2 \right) \right] \right) \quad (s = 1, 2).$$

Начальные условия при интегрировании этих уравнений должны быть заданы для всех переменных.

§ 8.8. Система с $N-1$ звеном переменной структуры управления

Наиболее совершенными являются системы, имеющие в управляющем устройстве более одного звена переменной структуры. Из теории систем с переменной структурой управления [19—21] следует, что для объекта управления, описываемого уравнением N -го порядка, целесообразно применять управляющее устройство с $N-1$ звеном переменной структуры. В системе при этом осуществляется переключение сигнала ошибки и $N-2$ ее производных.

Рассмотрим одну из типовых систем с переменной структурой управления для стационарного объекта N -го порядка (рис. 8.9) [20, 21]. Уравнения, описывающие работу этой системы, в соответствии со структурной схемой (см. рис. 8.9) запишем так:

$$R(p)y = -k(u+x) + R(p)f,$$

$$u = \sum_{j=1}^{N-1} u_j, \quad u_j = \frac{1}{2} (s_{21}^{(j)} y_j + s_{12}^{(j)} |y_j| \operatorname{sign} g), \quad (8.91)$$

$$y_j = p^{j-1} y, \quad g = Q(p)y,$$

где

$$R(p) = \sum_{j=1}^N a_j p^j; \quad Q(p) = \sum_{j=1}^N c_j p^{j-1};$$

$s_{21}^{(j)} = l_{1j} + l_{2j}$; $s_{12}^{(j)} = l_{1j} - l_{2j}$; $x(t)$ — стационарная случайная помеха с m_x и спектральной плотностью $S_x(\omega)$; $j(t)$ — детерминированная функция.

Эта система имеет 2^{N-1} структур, и ее анализ как мультиструктурной системы сложен. Поскольку отличие между структурами состоит только в различных уравнениях управлений, целесообразно ее рассматривать как моноструктурную систему со сложным нелинейным управляющим устройством. При этом будем считать, что параметры нелинейных звеньев выбраны из условия осуществления скользящего движения без помех по гиперплоскости переключения [20]

$$\sum_{i=1}^N c_i y_i = 0.$$

Как и для системы с одним звеном переменной структуры, по причинам, указанным ранее, воспользуемся для приближенного вероятностного анализа гауссовской аппроксимацией первой функции плотности вероятности распределения фазовых координат. Применим статистическую линеаризацию нелинейностей u_j и составим уравнения для определения вектора математического ожидания и корреляционной матрицы фазовых координат системы.

Для статистической линеаризации нелинейных звеньев воспользуемся формулой (8.64):

$$u_j = \frac{1}{2} s_{21}^{(j)} y_j + \frac{1}{2} s_{12}^{(j)} \varphi_{0j}(m_j, m_g, \theta_{jj}, \theta_{jg}, \theta_{gg}) + \\ + \frac{1}{2} s_{12}^{(j)} [k_{ij}(m_j, m_g, \theta_{jj}, \theta_{jg}, \theta_{gg}) y_j^0 + k_{2j}(m_j, \dots, \theta_{gg}) g^0]. \quad (8.92)$$

Подставим выражение (8.92) в первое уравнение (8.91) и, учитывая обозначение $y_1 = y$, запишем уравнение для математических ожиданий переменных:

$$R(p) m_1 = -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [s_{21}^{(j)} m_j + s_{12}^{(j)} \varphi_{0j}] + R(p) f, \quad (8.93)$$

$$m_g = Q(p) m_1, \quad m_j = p^{j-1} m_1,$$

где φ_{0j} зависят от $m_j, m_g, \theta_{jj}, \theta_{jg}, \theta_{gg}$ и определяются соответствующими формулами статистической линеаризации, приведенными в § 8.6.

Для центрированных переменных из (8.93) получаем уравнения

$$R(p)y_1^0 = -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [s_{21}^{(j)}y_j^0 + s_{12}^{(j)}k_{1j}y_j^0 + k_{2j}g^0] - kx, \quad (8.94)$$

$$g^0 = Q(p)y_1^0 y_j^0 = p^{j-1}y_1^0,$$

где k_{1j} , k_{2j} зависят от m_1 , m_g , θ_{jj} , θ_{jg} , θ_{gg} .

Разрешая систему уравнений (8.94) относительно первых производных от переменной y_j после приведения помехи $x(t)$ к белому шуму с помощью формирующего фильтра, получим каноническую систему линеаризованных уравнений с белыми шумами в правых частях типа (8.35). Анализ полученных уравнений целесообразно вести методом моментов [25, 32] совместно с уравнениями (8.93).

Исследования конкретных систем с переменной структурой управления, в которых осуществлен скользящий режим вблизи гиперплоскости переключения, показали, что помехи существенно изменяют характер движения [21, 28]. При высоком уровне помех происходит срыв скользящего режима. Однако с ростом отношения сигнал/шум в канале переключения структуры управления в системе в среднем статистическом выполняются условия переключения по математическому ожиданию ошибки. Наиболее уязвимым к действию помех является канал переключения. Кроме того, в системе с $N-1$ звеном переменной структуры повышается уровень шумов в переключаемых каналах за счет дифференцирования.

В общем случае вследствие наличия помех в системе с переменной структурой управления срывается скользящий режим переключения на заданной гиперплоскости. Движение системы при наличии шумов определяется не уравнением гиперплоскости, а уравнениями статистической динамики (8.93), (8.94).

Для того чтобы динамические свойства системы с переменной структурой управления при действии помех были близки к свойствам той же системы в скользящем режиме без помех, необходимо обеспечить достаточно большое отношение сигнал/шум в канале переключения. Это можно осуществить уменьшением уровня шума в этом канале. Поэтому исследования и проектирование таких систем направлены на разработку способов и устройств, обеспечивающих фильтрацию сигналов, подаваемых в Ψ -ячейки без существенного увеличения запаздывания. Некоторые пути инженерного решения этих вопросов изложены в [21].

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАЗДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ§ 9.1. Уравнение для плотности вероятности
выходных координат

В условиях ограниченного ресурса средств обработки информации и числа датчиков возникает необходимость их рационального использования в сложных системах управления. Одним из таких способов является последовательное использование этих устройств для поочередного обслуживания объектов. При этом мы приходим к *управлению в режиме разделения времени*.

Очевидно, что управление объектами с прерываниями по времени, к которым приводит режим разделения, может существенно отличаться от режима непрерывного управления. При наличии сложных алгоритмов управления и случайных условиях работы раздельное управление объектами также может быть случайным. Исследование вопросов качества управления динамическими объектами в режимах разделения времени является задачей, представляющей большой практический интерес, решение которой возможно в рамках теории динамических систем со случайной структурой [6].

В § 9.1 рассматриваются методы анализа динамических систем, работающих в режиме разделения времени, отличающиеся

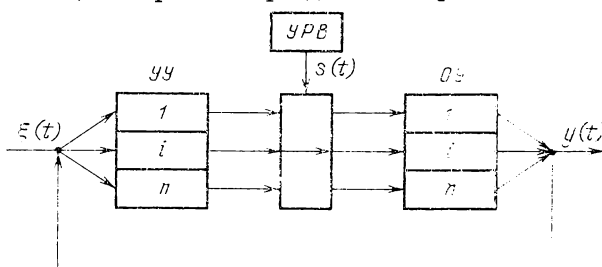


Рис. 9.1. Структурная схема системы управления автономным режимом разделения времени: УУ — управляющее устройство; УРВ — устройство управления режимом разделения времени; ОУ — объект управления

тем, что закон изменения процесса разделения $s(t)$ не зависит от хода изменения фазовых координат. Такой режим назовем *разделением времени с автономным управлением*.

Структурная схема подобных систем изображена на рис. 9.1. Устройство управления режимом разделения времени генерирует

процесс $s(t)$, имеющий n конечных состояний. При реализации s -го состояния процесса к s -му объекту управления подключается s -е управляющее устройство.

Автономное управление предполагает, что процесс $s(t)$ формируется независимо от изменения $y(t)$. Пусть динамика системы в s -м состоянии описывается уравнением (1.1). Все пояснения относительно этого уравнения давались в § 1.4. Напомним только, что при фиксированном значении $s(t)$ процесс $y(t)$ будет

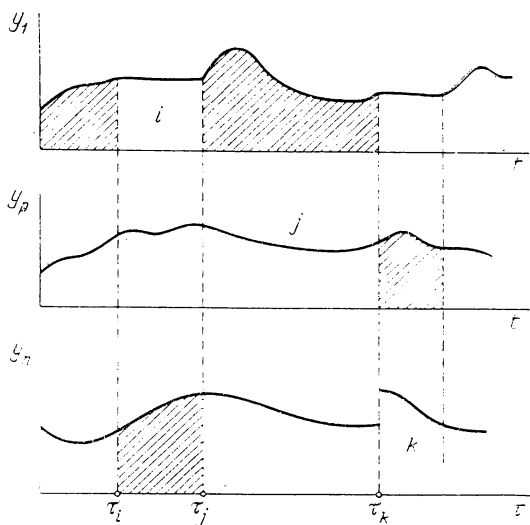


Рис. 9.2. Реализация процесса

непрерывным марковским. Ход изменения реализации процессов $y(t)$ и $s(t)$ показан на рис. 9.2.

Отметим особенности этих процессов, которые будут учитываться в дальнейшем. Во-первых, в силу определенных условий работы часть фазовых координат по интервалам отключения управления может фиксироваться. Подобный случай для фазовой координаты y_i при i -м состоянии процесса $y(t)$ на интервале от τ_i до τ_j показан на рис. 9.2.

Во-вторых, на интервалах отключения управления возможна экстраполяция координат, условно показанная для координаты y_p на интервале от τ_j до τ_k . Наконец, в-третьих, независимо от состояния $s(t)$ часть координат продолжает изменяться по тем же законам (см. рис. 9.2).

Другая особенность процессов $y(t)$ заключается в тех начальных условиях, с которых будут начинаться процессы в каждом из новых состояний системы. Так, на рис. 9.2 для фазовой координаты y_n показано, что при переходе $s(t)$ в k -е состояние в момент τ_k значение y_n скачкообразно меняется. Учет начальных условий является характерным фактором при решении некоторых задач.

Зададим начальные условия при переходах из s -го состояния в r -е посредством условной плотности вероятности. Эта функция определяет, что если в состоянии s координаты системы в момент t' равнялись $y'(t')$, то при изменении в этот момент состояния с s -го на i -е плотность вероятности координат в новом состоянии будет равняться $q^{(rs)}(y, t'|y', t')$.

В частном случае, когда все координаты остаются непрерывными, условная плотность вероятности будет равна функции

$$q^{(rs)}(y, t'|y, t') = \delta(y - y'),$$

где $\delta(y - y')$ — многомерный аналог δ -функции.

Рассмотрим методику анализа систем с программным разделением времени, полагая процесс $s(t)$ марковским с конечным числом состояний. Хотя такое предположение и накладывает ограничения на класс рассматриваемых задач, однако выбором свойств марковского процесса $s(t)$ удастся учесть весьма разнообразные случаи законов распределения длительности интервалов включения тех или иных каналов управления.

Сделанное предположение сразу позволяет использовать для анализа рассматриваемого класса систем аппарат теории систем со случайной структурой.

Совместные функции плотности вероятности $f(y, s, t)$ определяются из уравнений (3.72), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = & - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^T [\alpha^{(s)}(y, t) f(y, s, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^T \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t)] \right\}^T - v^{(s)}(t) f(y, s, t) + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y', r, t) v^{(sr)}(t) q^{(sr)}(y, t|y', t) dy' \quad (s = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (9.1)$$

где введено обозначение $v^{(s)}(t) = v^{(ss)}(t)$. Для сокращения записи представим уравнения (9.1) в следующей символической форме:

$$\frac{\partial f(y, s, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^T \pi(y, s, t) - \beta(y, s, t) + \gamma(y, s, t) \quad (s = \overline{1, n}), \quad (9.2)$$

где

$$\pi(y, s, t) = \alpha^{(s)}(y, t) f(y, s, t) - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^T [D^{(s)T}(y, t) f(y, s, t)] \right\}^T$$

— вектор плотности потока вероятности;

$$\beta(y, s, t) = v^{(s)}(t) f(y, s, t)$$

— функция поглощения;

$$\gamma(y, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y', r, t) v^{(sr)}(t) q^{(sr)}(y, t|y', t) dy'$$

— функция восстановления.

Уравнения (9.1) являются частным случаем обобщенного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Они образуют систему из n взаимосвязанных уравнений, в совокупности описывающих эволюцию плотности вероятности вектора фазовых координат системы $y(t)$ с учетом закона программного управления структурой $s(t)$ в режиме разделения времени. Эти уравнения должны решаться при начальном условии $f(y_0, s, t_0)$.

Величины $p_0^{(s)}$ определяют вероятности начальных состояний системы на момент времени $t_0 = 0$:

$$p_0^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_0, s, 0) dy_0 \quad (s = \overline{1, n}).$$

Характерным для уравнений (9.1) является наличие последних двух слагаемых в правой части, зависящих от статистических свойств и структуры процесса $s(t)$. При сделанных предположениях этот процесс является марковским с непрерывным временем и конечным числом состояний n . Вероятности нахождения такого процесса в каждом из состояний определяются уравнениями Колмогорова

$$\dot{p}^{(s)} = -\gamma^{(s)}(t) p^{(s)} + \sum_{r=1, r \neq s}^n \gamma^{(sr)}(t) p^{(r)} \quad (r, s = \overline{1, n}). \quad (9.3)$$

Если проинтегрировать обе части всех уравнений (9.1) по бесконечной области изменения фазовых координат, то получатся уравнения Колмогорова для вероятностей. Известно, что свойства марковских процессов с конечным числом состояний можно отображать посредством направленных графов (рис. 9.3).

Структура этого графа однозначно определяет структуру последней суммы в правой части (9.1). Входящие стрелки каждой вершины графа соответствуют определенному слагаемому. Выходящие из вершин графа стрелки определяют структуру суммарной интенсивности $\gamma^{(s)}(t)$. Таким образом, при наличии графа составление уравнений становится задачей сравнительно простой.

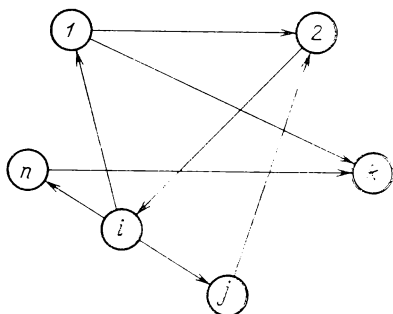


Рис. 9.3. Граф состояний

Уравнения (9.1) и (9.2) обладают одним существенным недостатком: они получены в предположении, что $s(t)$ является марковским процессом. При этом условии закон распределения длительности интервалов между сменами состояний будет экспоненциальным. Очевидно, что это ограничение далеко не всегда выполняется. Обобщим рассмотренную методику на более широкий класс законов распределения длительностей состояний.

Первоначально рассмотрим следующий пример. Пусть $s_0(t)$ — марковский процесс с конечным числом состояний ($n_0 = 4$) и

циклическим характером переходов из одного состояния в другое. Реализация подобного процесса показана на рис. 9.4, а его граф — на рис. 9.5, а. На основе $s_0(t)$ построим процесс $s(t)$ на два состояния ($n=2$). Длительность состояния первого процесса $s(t)$ равна сумме длительностей состояний первого и второго процессов $s_0(t)$. Длительность состояния второго процесса $s(t)$ равна сумме длительностей состояний третьего и четвертого процессов $s_0(t)$. Граф этого процесса показан на рис. 9.5, б.

Очевидно, что $s(t)$ не будет марковским процессом. Закон распределения длительностей состояний $\tau^{(s)}$ ($s=1, 2$) для этого

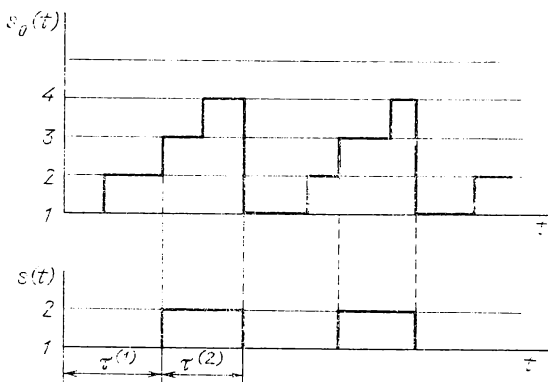


Рис. 9.4. Реализация марковского процесса

процесса будет отличаться от экспоненциального. Так, если интенсивности переходов процесса $s_0(t)$ соответственно равны между собой, т. е. $\nu^{(12)} = \nu^{(23)}$ и $\nu^{(34)} = \nu^{(41)}$, и постоянны, то закон распределения длительности интервалов будет эрланговским второго порядка. Изменяя величины интенсивностей, можно изменять закон распределения в пределах от экспоненциального до эрланговского второго порядка.

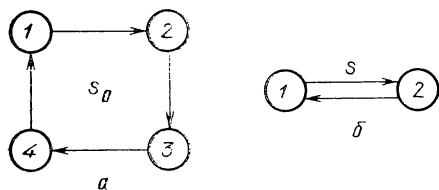


Рис. 9.5. Графы процессов

Теперь поставим задачу в обратном порядке. Пусть закон изменения режима разделения времени $s_1(t)$ порождается марковским процессом $s(t)$, как это было показано. Чтобы

получить уравнения для плотностей вероятности, необходимо расширить число состояний с $n_0=2$ до $n_0=4$ и записать для этих состояний четыре уравнения типа (9.2). Введение дополнительных состояний позволяет учесть более сложные, чем экспоненциальные, законы распределения длительностей интервалов состояний. Расширяя число возможных состояний, можно получать законы распределения в диапазонах от экспоненциального до эрланговского любого порядка. Известно, что подобная аппроксимация

обладает весьма широкими возможностями. Но при этом не надо забывать, что будет возрастать число совместно решаемых уравнений.

Вернемся к примеру, показанному на рис. 9.4, и отметим одну особенность. При переходе от первого состояния ко второму в расширенном пространстве состояний уравнения системы и непрерывность фазовых координат сохраняются. Это приводит к тому, что векторы плотности потока $\pi(y, 1, t)$ и $\pi(y, 2, t)$ будут иметь одинаковые функции $\alpha^{(1)}(y, t) = \alpha^{(2)}(y, t)$ и $D^{(1)}(y, t) = D^{(2)}(y, t)$, а плотность вероятности перехода $q^{(21)}(y|y') = \delta(y - y')$. Эти же условия, в частности, надо иметь в виду и при переходах из третьего состояния в четвертое.

Таким образом, при достаточно широком классе функций, определяющих закон изменения режима разделения времени, статистическое описание динамических систем сводится к совокупности обобщенных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова типа (9.2).

§ 9.2. Уравнения для вероятностных моментов

Как уже пояснялось, по смыслу решаемых задач интеграл

$$p^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, s, t) dy, \quad \sum_{s=1}^n p^{(s)} = 1 \quad (9.4)$$

и функции $p^{(s)}(t)$ имеют смысл вероятности нахождения системы в s -м состоянии.

Математическим ожиданием взвешенного k -го компонента векторного процесса $y(t)$ в s -м состоянии назовем интеграл

$$\mu_k^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_k f(y, s, t) dy. \quad (9.5)$$

Как видим из этого определения, математическое ожидание соответствует совместной плотности вероятности для одного состояния. Так как плотность вероятности для всех состояний с учетом их несовместимости равна сумме

$$f(y, t) = \sum_{s=1}^n f(y, s, t).$$

то математическое ожидание k -го компонента для всех состояний также будет равна сумме

$$m_k(t) = \sum_{s=1}^n \mu_k^{(s)}(t).$$

Взвешенным корреляционным моментом компонентов с индексами k и l в s -м состоянии назовем интеграл (см. гл. 3 и 4)

$$\Omega_{kl}^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - m_k^{(s)})(y_l - m_l^{(s)}) f(y, s, t) dy. \quad (9.6)$$

Эти функции соответствуют совместной плотности вероятности для s -го состояния. С учетом (9.5), (9.6) запишем уравнения для взвешенных моментов $\mu_k^{(s)}$ и $\Omega_{kl}^{(s)}$:

$$\dot{\mu}_k^{(s)} = - \int_{-\infty}^{\infty} y_k \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \pi(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} - \int_{-\infty}^{\infty} y_k \beta(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} + \int_{-\infty}^{\infty} y_k \gamma(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} \quad (k = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}), \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{kl}^{(s)} = & - \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - m_k^{(s)})(y_l - m_l^{(s)}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \pi(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - m_k^{(s)})(y_l - m_l^{(s)}) [\beta(\mathbf{y}, s, t) - \gamma(\mathbf{y}, s, t)] d\mathbf{y} \quad (9.8) \\ & (k, l = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Преобразуем уравнения (9.7) и (9.8), приняв закон управления режимом разделения времени $s(t)$ марковским процессом с конечным числом состояний n , а функции поглощения $\beta(\mathbf{y}, s, t)$ и восстановления $\gamma(\mathbf{y}, s, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{y}, s, t) &= v^{(s)}(t) f(\mathbf{y}, s, t), \\ \gamma(\mathbf{y}, s, t) &= \sum_{r=1 \neq s}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}', r, t) v^{(sr)}(t) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, для $\gamma(\mathbf{y}, s, t)$ получим выражение

$$\gamma(\mathbf{y}, s, t) = \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) f(\mathbf{y}, r, t).$$

С учетом результатов интегрирования уравнения моментов (9.7) и (9.8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_k^{(s)} = & - \int_{-\infty}^{\infty} y_k \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \pi(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} - v^{(s)}(t) \mu_k^{(s)} + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) \mu_k^{(r)} \quad (k = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}), \quad (9.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{kl}^{(s)} = & - \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - m_k^{(s)})(y_l - m_l^{(s)}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \pi(\mathbf{y}, s, t) d\mathbf{y} - \\ & - v^{(s)}(t) \Omega_{kl}^{(s)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t) (m_k^{(s)} - m_l^{(r)})(m_k^{(s)} - m_l^{(r)}) p^{(r)}(t) + \\ & + D_{kl}^{(s)}(t) p^{(s)}(t) \quad (k, l = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}). \quad (9.10) \end{aligned}$$

Если в каждом s -м состоянии система описывается линейным уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}^{(s)}(t)\xi(t), \quad (9.11)$$

где $\mathbf{u}(t)$ — r -мерный вектор регулярных функций; $\mathbf{A}^{(s)}(t)$, $\mathbf{B}^{(s)}(t)$, $\mathbf{F}^{(s)}(t)$ — матрицы переменных коэффициентов с элементами $a_{kl}^{(s)}(t)$, $b_{kl}^{(s)}(t)$ и $f_{kl}^{(s)}(t)$, то уравнения моментов (9.9) и (9.10) записываются в дифференциальной форме.

Для этого выполним интегрирование первых слагаемых в правых частях уравнений (9.9) и (9.10), выразив в явном виде вектор плотности потока $\mu(\mathbf{y}, s, t)$ через параметры уравнения системы (9.1). Вектор коэффициентов переноса $\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и матрица коэффициентов диффузии $\mathbf{D}^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ в этом случае равны:

$$\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{A}^{(s)}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{D}^{(s)}(t) = \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{y}, t)\mathbf{G}(t)\mathbf{F}^{(s)\tau}(t).$$

Скалярные составляющие вектора $\alpha^{(s)}(\mathbf{y}, t)$ и матрицы $\mathbf{D}^{(s)}(t)$ соответственно равны:

$$\alpha_k^{(s)} = \sum_{l=1}^{n_y} [a_{kl}^{(s)}(t)y_l + b_{kl}^{(s)}(t)u_l], \quad D_{kl}^{(s)} = \sum_{q,p=1}^{n_y} f_{kq}^{(s)}(t)f_{lp}^{(s)}(t)G_{qp}(t).$$

После преобразований уравнения математических ожиданий линейной системы принимают следующий вид:

$$\dot{\mu}_k^{(s)} = \sum_{l=1}^n [a_{kl}^{(s)}(t)\mu_l^{(s)} + b_{kl}^{(s)}(t)u_l] - v^{(s)}\mu_k^{(s)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t)\mu_k^{(r)} \quad (9.12)$$

$$(k = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}),$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{kl}^{(s)} = & \sum_{q=1}^{n_y} [a_{kq}^{(s)}(t)\Omega_{lq}^{(s)} + a_{lq}^{(s)}(t)\Omega_{kq}^{(s)}] - v^{(s)}\Omega_{kl}^{(s)} + \\ & + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t)\Omega_{kl}^{(r)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t)(m_k^{(s)} - m_l^{(s)})(m_k^{(r)} - m_l^{(r)})p^{(r)} + \\ & + D_{kl}^{(s)}p^{(s)} \quad (k, l = \overline{1, n_y}; s = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Запишем уравнения моментов (9.12) и (9.13) в матричной форме. Для этого введем вектор-столбец математических ожиданий размерности n_y и матрицу вторых корреляционных моментов размера $n_y \times n_y$. Имеем

$$\dot{\mu}^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}(t)\mu^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)}(t)\mathbf{u} - v^{(s)}(t)\mu^{(s)} + v^{(r)}(t)\mu^{(r)}, \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}^{(s)} = & \mathbf{A}^{(s)}(t)\Omega^{(s)} + \Omega^{(s)}\mathbf{A}^{(s)\tau}(t) - v^{(s)}\Omega^{(s)} + v^{(r)}\Omega^{(r)} + \\ & + v^{(s)}(\mathbf{m}^{(s)} - \mathbf{m}^{(r)})(\mathbf{m}^{(s)} - \mathbf{m}^{(r)})^{\tau}p^{(r)} + \mathbf{D}^{(s)}p^{(s)}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где

$$v^{(s)} = \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)} \quad (s = \overline{1, n}).$$

Прежде всего заметим, что в уравнениях (9.14) и (9.15) пока еще не использовалось предположение о виде плотности распределения вероятности. В этом смысле полученные уравнения моментов являются точными. Таким образом, анализ линейных систем с автономным режимом разделения времени в рамках корреляционной теории можно провести точно. Источником погрешностей будет только точность решения уравнений на ЦВМ.

Как будет видно из дальнейших примеров, некоторые задачи могут быть решены в аналитическом виде. По виду уравнений (9.14), (9.15) можно высказать некоторые соображения о влиянии режима разделения времени на качество управления. В случае управления системой (9.11) без разделения времени уравнения (9.14) и (9.15) «вырождаются» в известные уравнения моментов фазовых переменных системы управления с фиксированной структурой:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (9.16)$$

$$\dot{\Theta} = \mathbf{A}\Theta + \Theta\mathbf{A}^T + \mathbf{D}. \quad (9.17)$$

Уравнения (9.3), (9.14) и (9.15) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, совместное решение которых позволяет определить математическое ожидание $\mu^{(s)}(t)$ и вторые корреляционные моменты $\Omega^{(s)}(t)$ вектора $\mathbf{y}$. Система уравнений (9.3) содержит n уравнений Колмогорова для вероятностей состояний $p^{(s)}(t)$ структуры системы управления. Системы уравнений (9.14) и (9.15) содержат соответственно np и $n \frac{n_y(n_y + 1)}{2}$ уравнений для математических ожиданий $\mu_k^{(s)}$ и

вторых корреляционных моментов $\Omega_{kl}^{(s)}(t)$ компонентов вектора $\mathbf{y}$.

В отличие от систем с фиксированной структурой в системах с разделением времени даже в линейном случае уравнения для вторых корреляционных моментов (9.15) зависят от математических ожиданий, определяемых решением (9.14). Поэтому даже при отсутствии шумов ($\xi(t) = 0$) в (9.14), когда матрица $\mathbf{D}^{(s)}(t)$ в (9.15) становится «вырожденной», вектор фазовых переменных $\mathbf{y}(t)$ все равно остается случайной функцией аргумента за счет переключений структуры системы в случайные моменты времени.

В этом смысле функция $s(t)$, определяющая режим разделения времени, играет роль дополнительного возмущающего воздействия. В результате оценки, получаемые с помощью уравнений (9.16) и (9.17) для систем с фиксированной структурой, являются верхним пределом оценок для систем с разделением времени.

Таким образом, для анализа точности систем управления, работающих в режиме разделения времени, в рамках корреляционной теории необходимо решить системы уравнений для математических ожиданий и корреляционных моментов. В общем случае это удастся сделать численными методами. В отдельных частных случаях решение получается в аналитическом виде.

Рассмотрение конкретных задач предполагает их предварительную классификацию, которая может осуществляться по разным признакам. Для систем, работающих в режиме разделения времени, в основу классификации желательно положить следующие два признака, влияющих на качество управления.

Первый признак должен быть связан с характером приоритетов, назначаемых для каждого из объектов управления. С точки зрения организации дисциплины обслуживания наличие приоритета приводит к увеличению времени, отводимого на обслуживание выделенного объекта. Очевидно, что различие во времени обслуживания повлияет на качество управления (точность), поэтому первая группа задач должна касаться вопросов влияния степени приоритета на качество управления.

В те интервалы времени, когда обслуживание объекта прекращается, его поведение может быть различным. В простейшем случае после отключения управляющего устройства объект находится в режиме свободного движения под влиянием начальных условий, имеющихся в момент отключения управления. В более сложном варианте движение объекта происходит по некоторой программе, определяющей экстраполирование координат объекта. Для этого варианта простейшими случаями экстраполяции будут запоминание координат на время размыкания управления, линейная экстраполяция с запоминанием скорости, квадратичная аппроксимация.

Вторым признаком классификации задач управления в режиме разделения времени может служить характер поведения объекта на интервалах отсутствия управления.

§ 9.3. Анализ влияния степени приоритета на качество управления

Напомним, что структурная схема системы управления автономным режимом разделения времени изображена на рис. 9.1, где процесс $s(t)$ определяет последовательность или дисциплину обслуживания. Мы условились рассматривать такие задачи, когда процесс с конечными состояниями является случайным марковским или компонентом марковского процесса.

Приоритет в обслуживании того или иного объекта заключается в большем, по сравнению с остальными, выделении времени на обслуживание. При этом степень приоритета может определяться различными величинами. Так как $s(t)$ — процесс случайный, то степень приоритета целесообразно оценивать средним временем обслуживания. Объекты с большим приоритетом обладают большим средним временем обслуживания. Такая оценка удобна и проста с практической точки зрения, однако при этом имеется особенность, которую необходимо учитывать.

Известно, что марковский процесс с конечным числом состояний определяется не только средним временем пребывания в каком-либо состоянии, но в общем случае и законом распре-

деления длительности этого состояния. Поэтому исследование влияния степени приоритетов на качество управления должно проводиться с учетом вида закона распределения интервала обслуживания.

Для марковского процесса изменение средней длительности обслуживания может осуществляться двумя путями. Рассмотрим их на примере, когда $s(t)$ является марковским процессом с конечным числом состояний, равным n . Уже отмечалось, что в этом случае вероятности состояний $p^{(s)}(t)$ ($s = \overline{1, n}$) определяются уравнениями Колмогорова

$$\dot{p}^{(s)} = -v^{(s)}(t)p^{(s)} + \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t)p^{(r)} \quad (s = \overline{1, n}),$$

где $v^{(s)}(t)$ и $v^{(sr)}(t)$ — интенсивности переходов:

$$v^{(s)}(t) = \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}(t).$$

У процессов такого вида закон распределения длительностей обслуживания имеет экспоненциальный характер, и среднее время обслуживания s -го объекта равно $T_{\text{ср}}^{(s)} = 1/v^{(s)}$. Отсюда следует первая возможность создания приоритета: для изменения среднего времени обслуживания надо изменять величину интенсивности переходов. При этом закон распределения длительностей не меняется и остается экспоненциальным.

Понятно, что такой простой способ регулирования степени приоритета не всегда приемлем из-за вида закона распределения

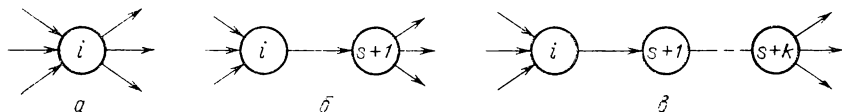


Рис. 9.6. Узлы графа состояний

интервала обслуживания. Чтобы учесть более сложные законы, необходимо использовать второй путь изменения среднего времени обслуживания.

Структура дисциплины обслуживания, как отмечалось, может быть отображена с помощью графа. Пример такого графа показан на рис. 9.3. Выделим s -й узел графа состояний (рис. 9.6, а) с учетом связей с другими узлами. Добавим новое $(s+1)$ состояние, непосредственно связанное только с s -м состоянием (рис. 9.6, б) и имеющее выходные связи s -го состояния. Пусть в дополнительном $(s+1)$ состоянии уравнения системы сохраняются такими же, как и в s -м состоянии. При этом среднее время нахождения системы в s -м состоянии увеличится и станет равным $T_{\text{ср}}^{(s)} = 1/v^{(s)} + 1/v^{(s+1)}$.

Закон распределения суммы двух независимых интервалов для s -го и $(s+1)$ -го состояний будет композицией двух экспонен-

циальных законов и будет отличаться от экспоненциального. Так, при $\nu^{(s+1)} = \nu^{(s)}$ мы получим закон распределения Эрланга второго порядка, а при различных вариациях $\nu^{(s+1)}$ он будет меняться в диапазоне от экспоненциального до эрланговского второго порядка. Распиряя число дополнительных состояний до $s+k$ (рис. 9.6. ϵ), можно добиться изменения закона распределения в широких пределах от экспоненциального до эрланговского $(k+1)$ -го порядка.

Этот способ, называемый *способом псевдосостояний*, позволяет сформулировать законы распределения длительности обслуживания очень широкого класса. Однако следует иметь в виду, что при

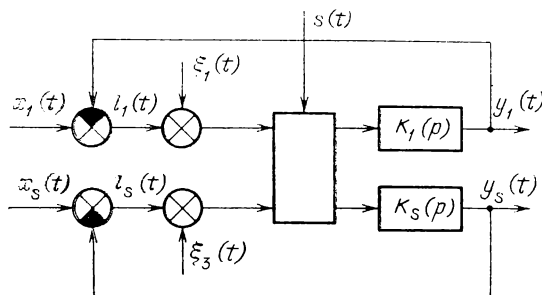


Рис. 9.7. Структурная схема системы

этом возрастает число состояний и соответственно число уравнений моментов. В последующем псевдосостояния будем учитывать в общем числе состояний, обозначаемых индексом n .

Подводя итоги сказанному, отметим три типа задач, которые могут возникнуть при анализе влияния степени приоритетов на качество управления. Первая задача — оценка влияния среднего времени обслуживания на качество управления при одинаковых законах распределения интервалов обслуживания (например, экспоненциальных); вторая — оценка влияния вида закона распределения при одинаковых средних значениях обслуживания; третья — оценка влияния среднего времени и вида закона распределения.

Начнем рассмотрение первой задачи на примере системы со структурной схемой, показанной на рис. 9.7. Пусть имеется n линейных следящих систем, работающих в режиме разделения времени так, что обслуживание одной системы приводит к замыканию контура управления другими системами в цепи сигнала рассогласования. Например, такого рода ситуация получается в системах слежения за несколькими самолетами с помощью одной радиолокационной станции, имеющей фазированную антенную решетку.

Полагаем, что дисциплина обслуживания $s(t)$ является марковским процессом с n конечными состояниями и интенсивностями переходов $\nu^{(sr)}(t)$, где $r, s = 1, n$. При таком задании $s(t)$ закон распределения длительности интервала обслуживания

будет экспоненциальным со средним временем

$$T_{\text{ср}}^{(s)} = 1/v^{(s)}, \quad v^{(s)} = \sum_{r=1 \neq s}^n v^{(sr)}.$$

Если все объекты имеют одинаковый приоритет, то одинаковы все времена ($T_{\text{ср}}^{(s)} = T_{\text{ср}}$), а следовательно, одинаковы интенсивности переходов ($v^{(s)} = v$). При наличии приоритета у s -го объекта $T_{\text{ср}}^{(s)} > T_{\text{ср}}$ для всех $r \neq s$. Чтобы сравнить качество управления при наличии приоритетов, положим все системы одинаковыми, т. е. их передаточные функции

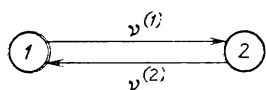


Рис. 9.8. Граф состояний при $n = 2$

$W_1(p) = W_2(p) = \dots = W(p)$. Все характеристики как задающих воздействий $x_s(t)$, так и возмущающих $\xi_s(t)$ также полагаем одинаковыми.

При этих предположениях точность слежения будет определяться степенью приоритета. Чтобы получить конкретные оценки в явном виде, рассмотрим следующий простой случай. Пусть число объектов управления $n = 2$. Граф состояний системы для этого случая показан на рис. 9.8. Первое состояние соответствует режиму управления первым объектом, а второе — вторым. Интенсивности переходов обозначим функциями $v^{(12)} = v^{(1)}$ и $v^{(21)} = v^{(2)}$. Среднее время управления первым объектом $T_{\text{ср}}^{(1)} = 1/v^{(1)}$, а среднее время управления вторым объектом $T_{\text{ср}}^{(2)} = 1/v^{(2)}$. Так как объекты равноценны, то для исследования возьмем первый из них. Степень приоритета будем оценивать отношением $q = T_{\text{ср}}^{(1)} / T_{\text{ср}}^{(2)} = v^{(2)} / v^{(1)}$. Если $q = 1$, то объекты по времени обслуживания равноценны. Если $q > 1$, то первый объект обладает приоритетом по сравнению со вторым, если же $q < 1$, то выше приоритет второго объекта. Изучим влияние степени приоритета на точность управления первым объектом. Пусть передаточная функция $W(p) = k/p$. $x_1(t) = at$, ξ_1 — белый шум со спектральной интенсивностью G_1 . В первом состоянии, когда идет управление первым объектом, уравнение системы относительно ошибки управления имеет вид

$$\dot{e}_1^{(1)} = ke_1^{(1)} + a - k\xi_1,$$

а во втором состоянии — вид

$$\dot{e}_1 = a.$$

Составим уравнения для взвешенных математических ожиданий и дисперсий ошибки управления в различных состояниях, для чего воспользуемся общей формой записи уравнений моментов (9.9) и (9.10). Так, уравнения для математических ожиданий принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1^{(1)} &= -k\mu_1^{(1)} + ap^{(1)} - v^{(1)}\mu_1^{(1)} + v^{(2)}\mu_1^{(2)}, \\ \dot{\mu}_1^{(2)} &= ap^{(2)} - v^{(2)}\mu_1^{(2)} + v^{(1)}\mu_1^{(1)}, \end{aligned}$$

а уравнения для дисперсий — вид

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1^{(1)} &= -2k\Omega_1^{(1)} + k^2 G_1 p^{(1)} - v^{(1)}\Omega_1^{(1)} + v^{(2)}\Omega_1^{(2)} + v^{(2)}(m_1^{(1)} - m_1^{(2)})p^{(2)}, \\ \dot{\Omega}_1^{(2)} &= -v^{(2)}\Omega_1^{(2)} + v^{(1)}\Omega_1^{(1)} + v^{(1)}(m_1^{(1)} - m_1^{(2)})^2 p^{(1)}.\end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию ошибки управления в установившемся режиме при $t = \infty$, когда $\dot{\mu}_1^{(s)} = 0$ и $\dot{\Omega}_1^{(s)} = 0$ ($s = 1, 2$). После решения алгебраических уравнений получаем

$$\begin{aligned}\mu_1^{(1)} &= \frac{x_1(1+q)}{kq}, & \Omega_1^{(1)} &= \frac{kG_1}{2}, \\ \mu_1^{(2)} &= \frac{aT_{\text{ср}}^{(2)}}{1+q}, & \Omega_1^{(2)} &= a^2 T_{\text{ср}}^{(2)} \left(\frac{1}{kq} + \frac{T_{\text{ср}}^{(2)}}{1+q} \right).\end{aligned}$$

Математическое ожидание и дисперсия ошибки в целом для обоих состояний будут равны суммам:

$$m_1 = \mu_1^{(1)} + \mu_1^{(2)}, \quad \theta_1 = \Omega_1^{(1)} + \Omega_1^{(2)}.$$

Введем следующие обозначения: $\theta = G_1 k/2$ — дисперсия ошибки в непрерывной системе; $m = a/k$ — математическое ожидание

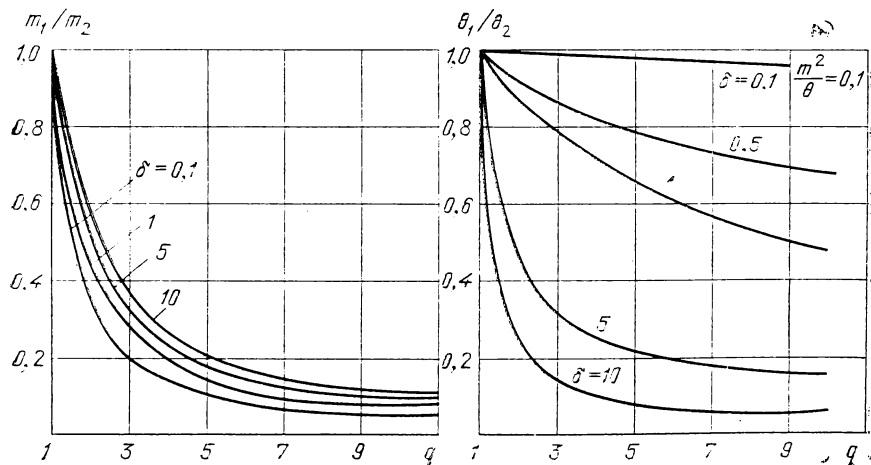


Рис. 9.9. Графики отношений функций $m_1/m_2 = f(q)$ и $\theta_1/\theta_2 = f(q)$

ошибки в непрерывной системе; $\delta = kT_{\text{ср}}^{(1)}$ — относительное значение коэффициента преобразования.

После всех преобразований можно найти величины:

$$m_1 = m \frac{1+q}{q} \left[1 + \frac{\delta}{(1+q)^2} \right], \quad \theta_1 = \theta + m^2 \frac{\delta}{q^2} \left(1 + \frac{\delta}{1+q} \right).$$

Поменяв все индексы на противоположные, можно найти эти же величины для второй системы:

$$m_2 = m(1+q) \left[1 + \frac{\delta q}{(1+q)^2} \right],$$

$$\theta_2 = \theta + m^2 \delta q \left(1 + \frac{\delta}{1+q} \right).$$

Влияние приоритета q будет оцениваться отношениями

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta + (1+q)^2}{q[\delta q + (1+q)^2]}, \quad \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1 + \frac{m^2 \delta}{\theta q^2} \left(1 + \frac{\delta}{1+q} \right)}{1 + \frac{m^2}{\theta} \delta q \left(1 + \frac{\delta}{1+q} \right)}.$$

Графики этих отношений в зависимости от величины q при разных значениях δ и m^2/θ показаны на рис. 9.9. В частном

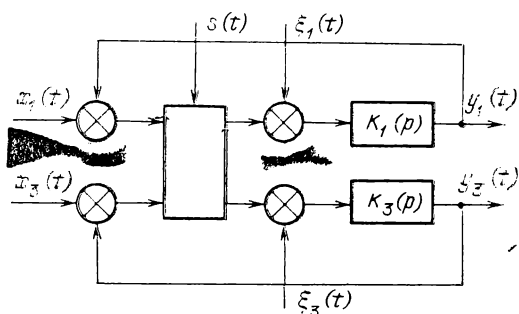


Рис. 9.10. Система обслуживания

случае, когда $\delta \gg 1$ и $\delta \gg q$, получаем следующие асимптотические оценки:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{q^2}, \quad \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{q^3}.$$

С ростом приоритета q ошибки в первой системе резко уменьшаются.

Оценим влияние степени приоритета при эрланговском законе распределения длительности обслуживания второго порядка для системы, изображенной на рис. 9.10. Чтобы сформулировать этот закон, рассмотрим граф переходов состояний, изображенный на

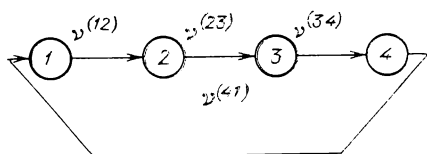


Рис. 9.11. Граф обслуживания

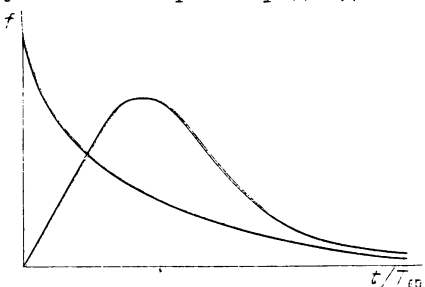


Рис. 9.12. Графики законов распределения

рис. 9.11. Пусть состояния 1 и 2 соответствуют режиму обслуживания первого объекта, а состояния 3 и 4 — режиму обслуживания второго объекта. Если интенсивности переходов попарно равны, т. е. $\nu^{(12)} = \nu^{(23)} = \nu^{(1)}$, а $\nu^{(34)} = \nu^{(41)} = \nu^{(2)}$, то законы распределения времени обслуживания будут эрланговскими второго порядка со средними значениями

$$T_{\text{ср}}^{(2)} = \frac{2}{\nu^{(1)}}, \quad T_{\text{ср}}^{(2)} = \frac{2}{\nu^{(2)}}.$$

Для сравнения на рис. 9.12 приводятся графики экспоненциального и эрланговского законов второго порядка с одинаковыми средними значениями. Коэффициент приоритета первого объекта относительно второго $q = T_{\text{ср}}^{(1)}/T_{\text{ср}}^{(2)} = \nu^{(2)}/\nu^{(1)}$. Рассмотрим зависимость ошибки управления от этого параметра. Стохастические дифференциальные уравнения первой системы для четырех возможных состояний имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1^{(1)} &= -k e_1^{(1)} - k \xi_1, & \dot{e}_1^{(2)} &= -k e_1^{(2)} - k \xi_1, \\ \dot{e}_1^{(3)} &= -k \xi_1, & \dot{e}_1^{(4)} &= -k \xi_1. \end{aligned}$$

Полагая математические ожидания ошибок управления равными нулю, запишем уравнения для взвешенных дисперсий:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1^{(1)} &= -2k\Omega_1^{(1)} + k^2 G_1 p^{(1)} - \nu^{(1)}\Omega_1^{(1)} + \nu^{(2)}\Omega_1^{(2)}, \\ \dot{\Omega}_1^{(2)} &= -2k\Omega_1^{(2)} + k^2 G_1 p^{(2)} - \nu^{(1)}\Omega_1^{(1)} + \nu^{(2)}\Omega_1^{(3)}, \\ \dot{\Omega}_1^{(3)} &= k^2 G_1 p^{(3)} - \nu^{(2)}\Omega_1^{(3)} + \nu^{(1)}\Omega_1^{(2)}, \\ \dot{\Omega}_1^{(4)} &= k^2 G_1 p^{(4)} - \nu^{(2)}\Omega_1^{(4)} + \nu^{(2)}\Omega_1^{(3)}. \end{aligned}$$

Общая дисперсия ошибки управления θ_1 в стационарном режиме равна сумме дисперсий:

$$\theta_1 = \Omega_1^{(1)} + \Omega_1^{(2)} + \Omega_1^{(3)} + \Omega_1^{(4)} = \theta \left[\frac{\delta}{(1+\delta)(1+q)} + \frac{3\delta}{q(1+q)} + \frac{1}{q+\delta} \right],$$

где $\theta = \frac{kG_1}{2}$ — дисперсия ошибки в непрерывной системе, а

$$\delta = \frac{kT_{\text{ср}}^{(1)}}{2}.$$

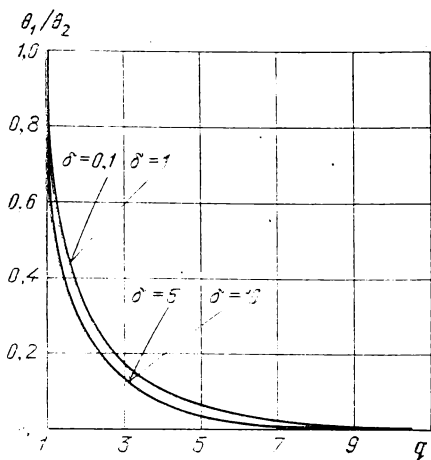


Рис. 9.13. Зависимость отношения дисперсий от параметра q

Поменяв местами индексы, получим выражение для дисперсии ошибки управления второй системы:

$$\theta_2 = \theta \left[\frac{\delta}{(1 + \delta)(1 + q)} + \frac{3q\delta}{1 + q} + \frac{q}{1 + \delta} \right].$$

В итоге отношение дисперсий имеет вид

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1 + [3(1 + \delta)\delta + (1 + q)/q\delta]}{1 + q[3(1 + \delta)\delta + (1 + q)/\delta]}.$$

График этой зависимости показан на рис. 9.13. В частном случае, когда $\delta \gg 1$, $\delta \gg q$, формула принимает вид

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{q^2}.$$

СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ
ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ§ 10.1. Уравнения систем со случайным периодом
квантования

В этой главе рассматриваются методы анализа систем управления с сигналами, квантованными в случайные моменты времени. По своей методологии системы такого класса близки к системам со случайной структурой, поэтому их описание включено в настоящую монографию [1, 4, 7].

Рассмотрим системы, поведение которых описывается следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{y}_i = -a_i(\mathbf{y}, t) - \sum_{j=1}^{n_y} b_{ij}(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}_j(\mathbf{y}, t) + \sum_{j=1}^{n_y} q_{ij} \xi_j \quad (i = \overline{1, n_y}). \quad (10.1)$$

Здесь сохранены все обозначения предыдущих глав за исключением новых функций $\mathbf{v}_j(\mathbf{y}, t)$, имеющих следующий смысл. Функции $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$ являются *последовательностями дельта-функций* со случайными моментами появления импульсов, интенсивности следования которых зависят от $\mathbf{y}$. Для сохранения марковского характера процесса $\mathbf{y}(t)$ моменты появления импульсов у последовательностей $\mathbf{v}_i(\mathbf{y}, t)$ и $\mathbf{v}_j(\mathbf{y}, t)$ будем считать независимыми и пуассоновскими с интенсивностями $\nu_i(\mathbf{y}, t)$ и $\nu_j(\mathbf{y}, t)$. Вектор всех дискретных воздействий $\mathbf{v}_j(\mathbf{y}, t)$ ($j = \overline{1, n_y}$) обозначим символом $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$. Функции $b_{ij}(\mathbf{y}, t)$, зависящие от времени и фазовых координат, образуют матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)$ размера $n_y \times n_y$. Векторная функция $\mathbf{a}_i(\mathbf{y}, t)$, зависящая от фазовых координат и времени, в дальнейшем обозначается как n_y -мерный вектор $\mathbf{a}(\mathbf{y}, t)$.

С учетом сделанных обозначений уравнение системы (10.1) в векторно-матричной форме записи принимает вид

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}\xi, \quad (10.2)$$

где для упрощения дальнейших записей опущена общая зависимость всех переменных от времени t . Уравнение можно представить в виде структурной схемы, изображенной на рис. 10.1, где канал $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ отображает наличие непрерывной составляющей, $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ — дискретной с амплитудой модуляции, $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ — дискретной с частотной модуляцией.

Полагая $\mathbf{B}(\mathbf{y}) = 0$, приходим к уравнению

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}\xi. \quad (10.3)$$

При сделанных выше предположениях о том, что $\xi(t)$ является вектором белых шумов, и некоторых дополнительных предположениях о векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ процесс $\mathbf{y}(t)$, описываемый уравнением (10.3), будет непрерывным марковским. В дальнейшем это уравнение и

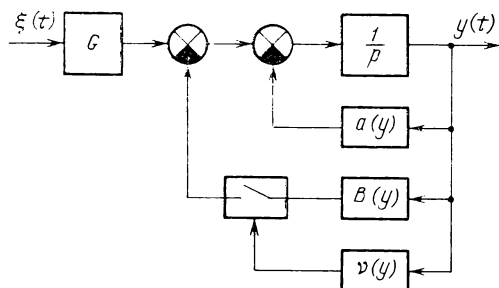


Рис. 10.1. Структурная схема системы со случайным периодом квантования

связанные с ним соотношения из теории непрерывных марковских процессов будут играть вспомогательную роль.

Чтобы описать поведение систем со случайным квантованием и амплитудной модуляцией, надо в уравнении (10.2) дискретные воздействия $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ полагать независимыми от изменения фазовых координат $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. Напомним, что это предположение приводит к тому, что интенсивности следования дискретных воздействий $\mathbf{v}_i(t)$ становятся независимыми от $\mathbf{y}$ и обрывается соответствующая связь на рис. 10.1. Уравнения систем с амплитудной модуляцией принимают вид

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{v} + \mathbf{F}\xi \quad (10.4)$$

или в скалярной форме

$$\dot{y}_i = -a_i(\mathbf{y}, t) - \sum_{j=1}^{n_y} b_{ij}(\mathbf{y}, t) v_j(t) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij}(t) \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}).$$

Исследуя системы с частотной модуляцией, надо полагать матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}$ не зависящей от $\mathbf{y}(t)$, а вектор дискретных воздействий $\mathbf{v}(\mathbf{y})$, имеющий интенсивности следования импульсов $\mathbf{v}_j(\mathbf{y}, t)$, зависящим от изменений фазовых координат. Уравнения таких систем принимают вид

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}\xi \quad (10.5)$$

или в скалярной форме

$$\dot{y}_i = -a_i(\mathbf{y}, t) - \sum_{j=1}^{n_y} b_{ij}(t) v_j(\mathbf{y}, t) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij}(t) \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}).$$

Структурная схема на рис. 10.1 для этого случая не имеет обратной связи через блок $\mathbf{B}(\mathbf{y})$.

Хорошо известна та роль, которую играют линейные системы в общей теории автоматических систем. Применимость к ним

принципа суперпозиции резко упрощает все соотношения и в ряде случаев позволяет получить точные решения задач. Применительно к системам со случайным квантованием строго линейные задачи могут быть сформулированы только для систем с амплитудной модуляцией, так как модуляция по частоте уже сама по себе операция нелинейная. В линейной системе с амплитудной модуляцией правые части уравнений (10.4) должны быть линейными относительно фазовых координат, что приводит к системе стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}_i = u_i(t) - \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}(t) y_j(t) - \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_y} b_{ijk}(t) y_k(t) v_j(t) + \\ + \sum_{j=1}^{n_y} q_{ij}(t) \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}), \quad (10.6)$$

где $u_i(t)$ — регулярные входные воздействия; $a_{ij}(t)$ и $b_{ijk}(t)$ — регулярные коэффициенты. Как будет показано в дальнейшем, для уравнений такого типа удастся получить решения в конечном виде, что имеет большое значение для разработки приближенной методики исследования нелинейных систем.

Таким образом, уравнения (10.2) — (10.6) описывают поведение дискретных систем со случайным квантованием и служат предметом дальнейшего исследования. Так как рассматриваемые уравнения являются стохастическими, то нужно условиться о смысле их интегралов. Применительно к непрерывным уравнениям (10.3) стохастические интегралы рассматриваем в симметризованной форме, содержание которой достаточно подробно обсуждалось в литературе.

§ 10.2. Уравнения Колмогорова — Феллера

Статистическое исследование динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, как правило, сводится к нахождению закона распределения фазовых координат или их вероятностных моментов. Исходными данными для решения такой задачи в нашем случае являются уравнения типа (10.2) — (10.6) и начальные условия к ним в виде плотностей вероятности начального распределения фазовых координат

$$f(\mathbf{y}, t=0) = f_0(\mathbf{y}),$$

где за начало отсчета принято время $t=0$.

При работе системы плотность вероятности изменяется и становится функцией времени t . Естественно, что в силу условий нормировки в любой момент должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, t) dy_1 \dots dy_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = 1.$$

Здесь и в дальнейшем символом $\int f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ обозначается n_y -мерный интеграл по всем составляющим вектора $\mathbf{y}$ от некоторой функции $f(\mathbf{y})$. В общем случае по исходным данным, о которых говорилось выше, желательно получить уравнение для плотности вероятности, решение которого с начальными условиями $f_0(\mathbf{y})$ давало бы функцию $f(\mathbf{y}, t)$ для любого момента времени $t > 0$. Такое уравнение получено и детально исследовано, в частности, для непрерывных систем, описываемых уравнением (10.3)

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}\xi.$$

Если $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ — непрерывно дифференцируемая детерминированная по $\mathbf{y}$ функция, удовлетворяющая условию Липшица, а $\xi(t)$ — белый шум, то вектор $\mathbf{y}(t)$ будет многомерным непрерывным марковским процессом с функцией плотности вероятности $f(\mathbf{y}, t)$, удовлетворяющей уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}\pi(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y})f(\mathbf{y}) - \frac{1}{2}\left[\nabla_{\mathbf{y}}^T(\mathbf{F}(\mathbf{y})\mathbf{G}\mathbf{F}^T(\mathbf{y}))f(\mathbf{y})\right]^T\right\}, \quad (10.7)$$

$$f(\mathbf{y}, t=0) = f_0(\mathbf{y}),$$

где для вектора дифференциалов принято обозначение

$$\nabla_{\mathbf{y}}^T = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n_y}}\right)^T.$$

Здесь, как было условлено раньше, не показана явная зависимость от времени всех входящих в (10.7) переменных и функций. Решение уравнения (10.7) с начальными условиями $f_0(\mathbf{y})$ и заданными граничными условиями является искомой функцией плотности вероятности фазовых координат системы.

При отсутствии поглощающих граничных условий искомая плотность вероятности $f(\mathbf{y}, t)$ удовлетворяет условиям нормировки и уравнение (10.7) может рассматриваться как уравнение сохранения вероятности. Запишем его в следующем виде:

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T\pi(\mathbf{y}). \quad (10.8)$$

Здесь $\pi(\mathbf{y})$ — вектор плотности потока вероятности с составляющими вдоль координатных осей

$$\pi_i(\mathbf{y}) = -a_i(\mathbf{y})f(\mathbf{y}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_y}\frac{\partial}{\partial y_j}\sum_{p=1}^{n_y}\sum_{q=1}^{n_y}\Phi_{ip}\Phi_{jq}g_{pq} \quad (i = \overline{1, n_y}), \quad (10.9)$$

где $a_i(\mathbf{y}, t)$ — составляющие вектора $\mathbf{a}(\mathbf{y})$; $\Phi_{ij}(t)$ — элементы матрицы $\mathbf{F}$; $g_{pq}(t)$ — элементы матрицы $\mathbf{G}$.

Чтобы пояснить смысл уравнения (10.8), перейдем к рассмотрению дискретных моментов времени t и $t + \Delta t$, где Δt — бесконечно малое приращение независимой переменной. В фазовом

пространстве системы выделим бесконечно малый объем $\Delta \mathbf{y} = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{n_y}$ с координатами

$$y_1, y_1 + \Delta y_1, y_2, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_{n_y}, y_{n_y} + \Delta y_{n_y}.$$

Вектор приращений обозначим через

$$\Delta \mathbf{y} = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{n_y})^T.$$

Дифференциальное уравнение (10.8) в скалярном виде и дискретной форме можно записать в виде равенства

$$\frac{j(\mathbf{y}, t + \Delta t) - j(\mathbf{y}, t)}{\Delta t} = - \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\pi_i(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, t) - \pi_i(\mathbf{y}, t)}{\Delta y_i},$$

что справедливо с точностью до малых величин порядка $(\Delta t)^2$ и выше. Отсюда находим, что приращение вероятности нахождения процесса в объеме $\Delta \mathbf{y} = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{n_y}$ за время Δt равно

$$\begin{aligned} j(\mathbf{y}, t + \Delta t) \Delta \mathbf{y} - j(\mathbf{y}, t) \Delta \mathbf{y} = \\ = - \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} \pi_i(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, t) \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1} \dots \Delta y_{n_y} + \\ + \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} \pi_i(\mathbf{y}, t) \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1} \dots \Delta y_{n_y}. \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства показывает, что изменение вероятности в объеме $\Delta \mathbf{y}$ обусловлено потоками вероятности через его границы с координатами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}$

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{y}, t) &= \pi_i(\mathbf{y}, t) \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1} \dots \Delta y_{n_y}, \\ p_i(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, t) &= \pi_i(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, t) \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1} \dots \Delta y_{n_y}. \end{aligned}$$

В результате уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова как уравнение сохранения вероятности для дискретных моментов времени можно записать в виде

$$j(\mathbf{y}, t + \Delta t) \Delta \mathbf{y} - j(\mathbf{y}, t) \Delta \mathbf{y} = - \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, t) + \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(\mathbf{y}, t). \quad (10.10)$$

Напомним, что это равенство получено для непрерывных марковских процессов, описываемых уравнением (10.3).

Уравнения для систем со случайным квантованием получили название *уравнений Колмогорова — Феллера* [7, 69].

Приступим к их выводу, для чего рассмотрим уравнения

$$\dot{y}_i = -a_i(\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij} \xi_j \quad (i = \overline{1, n_y}), \quad (10.11)$$

отличающиеся от уравнений для непрерывных процессов наличием дискретных воздействий

$$v_j(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{jk} \delta(t - t_{jk}),$$

где $\delta(t - t_{jk})$ — дельта-функции с амплитудой x_{jk} , возникающие в случайные моменты времени t_{jk} . Интенсивности $v_j(y, t)$ ($j = 1, n_y$) импульсных последовательностей в общем случае могут зависеть от изменения

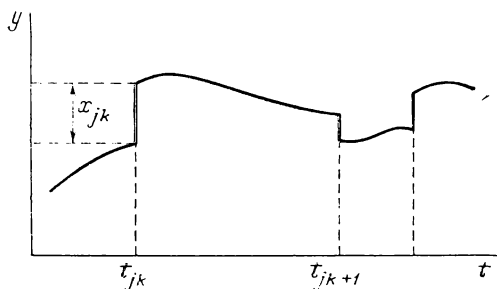


Рис. 10.2. Реализация процесса

фазовых координат $y(t)$, что и отражено в записи $v_j(y, t)$.

Первоначально рассмотрим качественное отличие реализаций процессов $y_i(t)$ в уравнениях (10.1) по сравнению с реализациями непрерывных процессов, о которых говорилось в начале параграфа. Так как мы условились

стохастические интегралы рассматривать в симметризованной форме, то каждый дельта-импульс в момент t_{jk} вызовет скачкообразное изменение амплитуды $y_i(t)$ на величину x_{jk} и реализации примут вид, показанный на рис. 10.2. В промежутках между моментами появления импульсов функции $y_i(t)$ изменяются по законам, описываемым непрерывными уравнениями

$$\dot{y}_i(t) = -a_i(y, t) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij}(t) \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}). \quad (10.12)$$

Таким образом, уравнения со случайным квантованием (10.11) описывают кусочно-непрерывные марковские процессы со скачками в случайные моменты времени t_{jk} .

Чтобы получить уравнения Колмогорова — Феллера, необходимо наложить ограничения на статистические характеристики моментов квантования для всех n_y последовательностей дискретных воздействий $v_j(y, t)$ ($j = \overline{1, n_y}$). Полагаем, что моменты квантования в каждой из последовательностей статистически независимы друг от друга, а внутри каждой из последовательностей они образуют пуассоновский поток точек. Напомним определение этого потока. Для этого возьмем j -ю последовательность моментов квантования и выделим интервал $(t, t + \Delta t)$, длительность которого бесконечно мала. Для пуассоновского потока вероятность появления точки на этом интервале пропорциональна его длительности и обозначается через $v_j(t) \Delta t$, а вероятность появления двух и более точек является бесконечно малой величиной порядка $(\Delta t)^2$ и выше.

Описанное свойство потока называется *ординарностью*. Другое свойство состоит в независимости вероятностей появления точек на любых пересекающихся интервалах времени. Указанные свойства приводят к следующим характеристикам пуассоновского потока: во-первых, если точка выпала на интервале $(t, t + \Delta t)$, то плотность вероятности интервала τ до момента появления следующей точки равна

$$f_j(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} v_j(\tau) \left\{ \exp \left[- \int_t^{t+\tau} v_j(x) dx \right] \right\} d\tau;$$

во-вторых, длительности интервалов между моментами появления точек статистически независимы. Параметр $v_j(t)$ является средним числом появления точек в единицу времени и называется *интенсивностью потока*. Таким образом, пуассоновский поток полностью определяется значением интенсивности. Если $v_j(t) = v_j$ и будет величиной постоянной, поток называется *однородным*. У однородного потока плотность вероятности длительностей интервалов между моментами появления точек не зависит от текущего времени и имеет экспоненциальный характер

$$f_j(\tau) = v_j e^{-v_j \tau}.$$

Уравнения Колмогорова — Феллера для плотности вероятности $f(y, t)$ были получены при условии, что моменты квантования образуют пуассоновские потоки точек. Перейдем к нахождению этих уравнений.

Вывод уравнений Колмогорова — Феллера использует закон сохранения вероятности в том виде, как он рассматривался выше

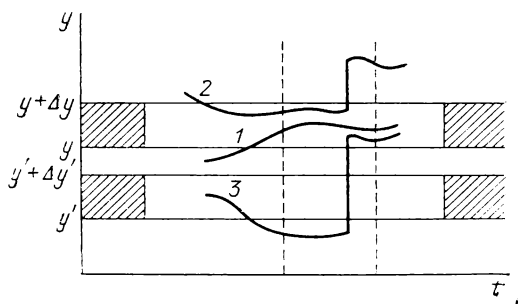


Рис. 10.3. Скачкообразный процесс

для непрерывных процессов. Возьмем произвольный момент времени τ и предположим, что известна плотность вероятности $f(y, \tau)$. В соседний момент времени $t = \tau + \Delta y$ плотность вероятности равна $f(y, t)$. Найдем эти функции. Для этого зафиксируем интервал изменения фазовых координат на уровнях от y до $y + \Delta y$ (рис. 10.3). В области $\Delta y \Delta t$ возможно появление реализаций трех видов: 1 — непрерывных; 2 — скачкообразно уходящих

из этой области; $\mathcal{Z}$ — скачкообразно приходящих в эту область из некоторой другой области $\Delta y' \Delta t$. Так как все эти варианты несовместны, т. е. каждая реализация может относиться только к одному из перечисленных случаев, то вероятность $f(y, t) \Delta y$ попадания процесса в интервал от y до $y + \Delta t$ в момент t будет иметь три слагаемых:

$$f(y, t) \Delta y = f_1(y, t) \Delta y + f_2(y, t) \Delta y + f_3(y, t) \Delta y \\ (\Delta y = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_{n_y}), \quad (10.13)$$

первое из которых определяется непрерывными реализациями, а второе и третье — скачкообразными (см. рис. 10.3). Определим эти слагаемые.

Так как уравнения системы (10.11) содержат n_y дискретных статистически независимых по моментам появления пуассоновских последовательностей $v_j(y, t)$ ($j = \overline{1, n_y}$), то вероятность наличия скачка на интервале Δt будет равна сумме

$$\sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau) \Delta t.$$

Отсюда вероятность того, что реализации останутся непрерывными, равна

$$1 - \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau) \Delta t.$$

Изменение вероятности попадания в Δy непрерывных реализаций, задаваемых уравнениями (10.12), можно получить, используя уравнение (10.10) с учетом вероятностей скачков. В результате первое слагаемое правой части (10.13) будет равно

$$f_1(y, t) \Delta y = \left[1 - \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau) \Delta t \right] \left[f(y, \tau) \Delta y - \right. \\ \left. - \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(y + \Delta y, \tau) + \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(y, \tau) \right]. \quad (10.14)$$

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого выражения (10.13), зависящего от уходящих из области $\Delta y \Delta t$ скачкообразных реализаций (кривая 2 на рис. 10.3). Так как вероятность ухода этих реализаций есть $\Delta t \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau)$, то искомая вероятность равна

$$f_2(y, t) \Delta y = \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau) f(y, \tau) \Delta y. \quad (10.15)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению третьего слагаемого (10.13), введем некоторые предположения о характере влияния амплитуд дельта-импульсов x_{jk} в уравнениях (10.11) на изменение реализаций процесса $y(t)$. Пусть в некоторый случайный момент времени t_{jk} (см. рис. 10.2) произошло квантование и координата процесса скачкообразно изменилась от уровня $y'(t_{jk})$ до значения

$$y(t_{jk}) = y'(t_{jk}) + x_{jk}.$$

Будем считать амплитуду скачка случайной, зависящей от времени t и первоначальной координаты y' . Это условие можно выразить путем задания условной плотности вероятности $\eta_j(y|y', t)$, определяющей закон распределения амплитуды процесса y после скачка при условии, что скачок произошел в момент t с уровня y' . Естественно, что задаваемая функция нормирована по переменной y , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_j(y|y', t) dy = 1.$$

Вид функции условной плотности вероятности определяется статистическими свойствами величины x_{jk} и характером ее связи с ходом изменения процесса $y(t)$.

Теперь вернемся к первоначальной задаче и найдем третье слагаемое в правой части уравнения (10.13). Из рис. 10.3 видно, что в область $\Delta y \Delta t$ возможны скачки реализаций третьего типа из любых других областей с координатами y' и $y' + \Delta y'$, где y' может быть в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как существует n_y независимых пуассоновских потоков, определяющих скачки, то искомая вероятность попадания в область $\Delta y \Delta t$ реализаций третьего типа будет равна

$$f_3(y, t) \Delta y = \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} v_j(y', \tau) \eta_j(y|y', \tau) \Delta y f(y', \tau) dy'. \quad (10.16)$$

Подставляя найденные вероятности (10.14) — (10.16) в (10.13), получаем соотношение

$$\begin{aligned} f(y, t) \Delta y = & \left[1 - \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} v_j(t) \right] \left[f(y, \tau) \Delta y - \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(y + \Delta y, \tau) + \right. \\ & \left. + \Delta t \sum_{i=1}^{n_y} p_i(y, \tau) \right] - \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\tau) f(y, \tau) \Delta y + \\ & + \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} v_j(y', \tau) \eta_j(y|y', \tau) \Delta y f(y', \tau) dy'. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow t$, отбрасывая члены второго порядка малости, содержащие множители типа $(\Delta t)^2$, $\Delta t \Delta y$, учитывая выражение для предельного перехода и

равенства (10.10), получаем интегродифференциальное уравнение Колмогорова — Феллера для плотности вероятности

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{y}, t) = & - \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial}{\partial y_i} \pi_i(\mathbf{y}, t) - v(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}', t) \eta_j(\mathbf{y} | \mathbf{y}', t) f(\mathbf{y}', t) d\mathbf{y}', \quad (10.17) \\ f(\mathbf{y}, t=0) = & f_0(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

где

$$v(\mathbf{y}, t) = \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\mathbf{y}, t)$$

— суммарная интенсивность квантования. В векторной форме это уравнение можно записать в виде

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = - \nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}') \eta_j(\mathbf{y} | \mathbf{y}', t) f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \quad (10.18)$$

Составляющие вектора плотности потока вероятности $\pi(\mathbf{y})$ в этом уравнении определяются выражением (10.9).

§ 10.3. Уравнения для плотностей вероятности

Полученное в общем виде уравнение Колмогорова — Феллера (10.18) можно применять для исследования автоматических систем со случайным квантованием. Специфика возникающих при этом задач заключается в различной структуре условных плотностей вероятности $\eta_j(\mathbf{y} | \mathbf{y}', t)$. В этом параграфе рассматриваются различные варианты уравнений лишь при пуассоновском характере квантования.

Простейшей задачей является исследование непрерывных систем управления с дискретными воздействиями на входе, амплитуды которых не зависят от изменения фазовых координат $\mathbf{y}(t)$. Стохастические дифференциальные уравнения для этого случая запишем в следующем виде:

$$\dot{y}_i(t) = -a_i(\mathbf{y}, t) + \sum_{j=1}^{n_y} x_{ij}(t) v_j(t) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij}(t) \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}), \quad (10.19)$$

где $x_{ij}(t)$ являются случайными функциями, а остальные обозначения те же, что и в уравнении (10.5). Если стохастические интегралы уравнений (10.19) рассматривать в симметризованной форме, то можно считать, что

$$x_{ij}(t) v_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{jk} \delta(t - t_{jk}),$$

где значения амплитуд дельта-импульсов $x_{jk} = x_{jk}(t = t_{jk})$.

Пусть в общем случае система функций $x_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1, n_y}$) является совокупностью случайных процессов, статистически независимой от $y(t)$ и принимающей независимые значения при всех t_{jk} ($k = -\infty, \infty$). Сгруппируем эту совокупность следующим образом: для каждого индекса j ($j = \overline{1, n_y}$) введем вектор воздействий

$$x_j(t) = [x_{1j}(t), x_{2j}(t), \dots, x_{n_jj}(t)]^T,$$

одномерную плотность распределения вероятности которого обозначим через $f_{0j}(x, t)$.

При сделанных предположениях о свойствах процесса $x_j(t)$ условная плотность вероятности $\eta_j(y|y', t)$ будет определяться следующими соображениями. Пусть момент времени t соответствует моменту квантования для последовательности $v_i(t)$ и к этому моменту вектор фазовых координат равен $y'(t)$. Благодаря воздействию на систему дельта-импульса с амплитудой $x_j(t)$ выходной процесс скачкообразно изменится:

$$y(t) = y'(t) + x_j(t).$$

Если вектор $x_j(t)$ имеет плотность распределения вероятности $f_{0j}(x, t)$, то условная плотность вероятности

$$\eta_j(y|y', t) = f_{0j}(y - y', t). \quad (10.20)$$

В результате для систем с дискретными воздействиями на входе уравнение для плотности вероятности выходных координат можно получить, если в выражение (10.18) подставить соотношение (10.20):

$$\dot{f}(y) = -\nabla_y^T f(y) - v(y) f(y) + \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} v_j(y') f_{0j}(y - y') f(y') dy', \quad (10.21)$$

где $v_j(y)$ — интенсивность квантования в потоках входных дискретных воздействий. Ряд задач, связанных с исследованием уравнения типа (10.21), решался в статистической радиотехнике [7].

Пусть система со случайным квантованием и выходными координатами $y(t)$ работает следующим образом: в моменты квантования t_{jk} выходной процесс вначале мгновенно обнуляется, а затем восстанавливается с новыми начальными условиями, независимыми от конечных, существовавших перед моментом квантования. В частности, каждый раз восстановление может начинаться с некоторого определенного значения x , как показано на рис. 10.4 для одного компонента. В общем случае координата восстановления x может быть случайной с плотностью вероятности $f_0(x, t)$, независимой от $y(t)$. В этом случае функция условной плотности вероятности

$$\eta_j(y|y', t) = f_0(y, t)$$

и последнее слагаемое в уравнении (10.18) преобразуются следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j(y') \eta_j(y' | y) f(y') dy' = f_{0j}(y) \int_{-\infty}^{\infty} v_j(y') f(y') dy' = f_{0j}(y) \langle v_j(y) \rangle,$$

где

$$\langle v_j(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(y) f(y) dy$$

— среднее значение интенсивности квантования. В итоге уравнение Колмогорова — Феллера для плотности вероятности принимает вид

$$\dot{f}(y) = -\nabla_y^2 f(y) - v(y) f(y) + \sum_{j=1}^{n_y} \langle v_j(y) \rangle f_{0j}(y).$$

Если условия восстановления неслучайные, как показано на рис. 10.4, то

$$f_{0j}(y) = \delta(y - x_j).$$

Теперь обратимся к более интересному для теории автоматического управления виду систем со случайным квантованием и

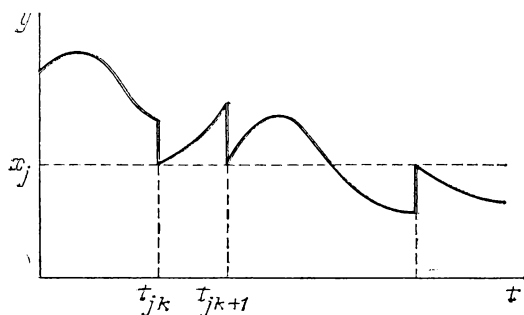


Рис. 10.4. Восстановление процесса

амплитудной модуляцией. Уравнения такой системы имеют вид

$$\dot{y}_i = -a_i(y) - \sum_{j=1}^{n_y} b_{ij}(y) v_j + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij} \xi_j,$$

где $b_{ij}(y, t)$ — заданные функции фазовых координат y , регулярно зависящие от времени t . В системах с амплитудной модуляцией, как это пояснялось выше, интенсивности квантования $v_j(t)$ дискретных воздействий $v_j(t)$ не зависят от y . В соответствии с принятой схемой в моменты квантования t_{jk} выходной процесс скачкообразно изменяет свои значения с уровня y'_i до уровня

$$y_i = y'_i - b_{ij}(y').$$

Матричную функцию $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)$ с элементами $b_{ij}(\mathbf{y}, t)$ ($i, j = \overline{1, n_y}$) разобьем на совокупность векторных функций

$$\mathbf{b}_j(\mathbf{y}, t) = [b_{1j}(\mathbf{y}, t), b_{2j}(\mathbf{y}, t), \dots, b_{n_j}(\mathbf{y}, t)]^T \quad (j = \overline{1, n_y})$$

путем выделения соответствующих столбцов исходной матрицы. Тогда в векторной форме записи амплитуда выходного процесса после скачка равна

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' - \mathbf{b}_j(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_j(\mathbf{y}'),$$

где $\mathbf{y}'$ — вектор выходных координат перед моментом квантования, а векторная функция $\mathbf{e}_j(\mathbf{y}')$ имеет компоненты

$$e_{ij}(\mathbf{y}') = y'_i - b_{ij}(\mathbf{y}') \quad (i = \overline{1, n_y}).$$

При определенном значении $\mathbf{y}'$ и заданной функции $\mathbf{b}_j(\mathbf{y}')$ условная плотность вероятности имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_j(\mathbf{y} | \mathbf{y}') &= \delta[\mathbf{y} - \mathbf{e}_j(\mathbf{y}')] = \\ &= \delta[y_1 - e_{1j}(\mathbf{y}')] \delta[y_2 - e_{2j}(\mathbf{y}')] \dots \delta[y_{n_y} - e_{n_j}(\mathbf{y}')]. \end{aligned}$$

С учетом структуры этой функции и независимости интенсивности v_j от $\mathbf{y}$ запишем выражения для последних слагаемых уравнения (10.18):

$$v_j \int_{-\infty}^{\infty} \eta_j(\mathbf{y} | \mathbf{y}') f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}' = v_j \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{e}_j(\mathbf{y}')] f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}' \quad (j = \overline{1, n_y}). \quad (10.22)$$

Предположим, что функция $\mathbf{e}_j(\mathbf{y}')$ является монотонной и существует единственное решение векторного уравнения $\mathbf{e}_j(\mathbf{y}') = \mathbf{x}$, равное

$$\mathbf{y}' = \mathbf{h}_j(\mathbf{x}). \quad (10.23)$$

В (10.22) произведем замену переменных (10.23) с учетом того, что векторный дифференциал

$$d\mathbf{y}' = \left| \frac{\partial \mathbf{h}_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right| d\mathbf{x},$$

где $\left| \frac{\partial \mathbf{h}_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|$ — якобиан функции (10.23). В результате подстановки получаем выражение

$$v_j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{h}_j(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{h}_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right| d\mathbf{x} = v_j \left| \frac{\partial \mathbf{h}_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| f(\mathbf{h}_j(\mathbf{y})).$$

В итоге общая форма записи уравнения Колмогорова — Феллера (10.18) для систем с амплитудной модуляцией приводится к виду

$$\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) - \nu f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \left| \frac{\partial \mathbf{h}_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| f(\mathbf{h}_j(\mathbf{y})), \quad (10.24)$$

где $\mathbf{h}_j(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{b}_j(\mathbf{y})$, а $\nu(t) = \sum_{j=1}^{n_y} v_j(t)$.

Если в системе имеет место линейное амплитудное квантование, то ее уравнения в соответствии с (10.6) примут вид

$$\dot{y}_i = -a_i(y) - \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_y} b_{ikj} y_k v_j + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij} \xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n_y}).$$

В этом случае векторные функции $\mathbf{b}_j(\mathbf{y})$ будут линейными и их можно записать в виде произведения

$$\mathbf{b}_j(\mathbf{y}) = \mathbf{B}_j \mathbf{y},$$

где $\mathbf{B}_j$ — матрица размера $n_y \times n_y$ с коэффициентами $b_{ikj}(t)$. Векторная функция

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{y}') = \mathbf{y}' - \mathbf{B}_j(\mathbf{y}')$$

также будет линейной:

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{y}') = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_j) \mathbf{y},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Сумму матриц в правой части равенства обозначим матрицей $\mathbf{E}_j = \mathbf{I} - \mathbf{B}_j$, и тогда

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{y}') = \mathbf{E}_j \mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Решая это уравнение, находим вектор

$$\mathbf{y}' = \mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{x},$$

где $\mathbf{E}_j^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\mathbf{E}_j$.

Таким образом, для линейного случая функция (10.23) становится линейной относительно $\mathbf{x}$ и равной

$$\mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_j)^{-1} \mathbf{x}.$$

Так как якобиан линейного преобразования равен определителю его матрицы

$$\left| \frac{\partial \mathbf{h}_j}{\partial \mathbf{x}} \right| = |\mathbf{E}_j^{-1}| = |(\mathbf{I} - \mathbf{B}_j)^{-1}|,$$

то уравнение Колмогорова — Феллера для систем со случайным пуассоновским квантованием и линейной амплитудной модуляцией приводится к виду

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}) - v_j'(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} v_j |\mathbf{E}_j^{-1}| f(\mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{y}), \quad (10.25)$$

где $\mathbf{E}_j = \mathbf{I} - \mathbf{B}_j$.

Переходим к рассмотрению систем с частотной модуляцией, описываемых уравнениями (10.5)

$$\dot{y}_i = -a_i(y_i) - \sum_{j=1}^{n_y} b_{ij} v_j(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} \varphi_{ij} \xi_j \quad (i = \overline{1, n_y}).$$

Напомним, что обозначением $v_j(\mathbf{y}, t)$ подчеркивается зависимость интенсивностей $v_j(\mathbf{y}, t)$ от переменной $\mathbf{y}(t)$. В стохастическом

дифференциальном уравнении системы коэффициенты $b_{ij}(t)$ являются регулярными функциями времени и образуют матрицу $\mathbf{B}(t)$. Выделим j -й столбец этой матрицы и представим его в виде вектора

$$\mathbf{b}_j(t) = [b_{1j}(t), b_{2j}(t), \dots, b_{nj}(t)]^T.$$

Используя предыдущие рассуждения, можно утверждать, что если перед моментом квантования t_{jk} выходные координаты системы равнялись $\mathbf{y}'$, то после него они станут равны

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' - \mathbf{b}_j.$$

В результате условную плотность вероятности $\eta_j(\mathbf{y}|\mathbf{y}')$ можно выразить как функцию

$$\eta_j(\mathbf{y}|\mathbf{y}') = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}' + \mathbf{b}_j).$$

С учетом этого последние слагаемые в уравнении Колмогорова — Феллера (10.17) становятся равными:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}') \eta_j(\mathbf{y}|\mathbf{y}') f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}' = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}' + \mathbf{b}_j) f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}'.$$

Введем замену переменной $\mathbf{y}' - \mathbf{b}_j = \mathbf{x}$ с дифференциалом $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}'$. После подстановок получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{x} + \mathbf{b}_j) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x} + \mathbf{b}_j) d\mathbf{x} = v_j(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j) f(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j).$$

В итоге уравнение Колмогорова — Феллера для плотности вероятности фазовых координат системы со случайным квантованием и частотной модуляцией принимает вид

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_H} v_j(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j) f(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j). \quad (10.26)$$

Остается рассмотреть общий случай систем с амплитудной и частотной модуляциями. Результаты этого легко получаются, если повторить все рассуждения, проведенные для систем с амплитудной модуляцией, но с учетом того, что формула (10.22) должна быть заменена выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}') \eta_j(\mathbf{y}|\mathbf{y}') f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}' = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}') \delta[\mathbf{y} - \mathbf{e}_j(\mathbf{y}')] f(\mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \quad (10.27)$$

Используя в (10.22) замену переменной (10.23) и повторяя все последующие выкладки применительно к (10.27), приходим к следующему соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}) \delta[\mathbf{y} - \mathbf{e}_j(\mathbf{y})] f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = v_j[h_j(\mathbf{y})] \left| \frac{\partial h_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| f(h_j(\mathbf{y})).$$

Уравнение для плотности вероятности как при амплитудной, так и при частотной модуляции принимает вид

$$\dot{f}(y) = -\nabla_y^T \pi(y) - v(y) f(y) + \sum_{j=1}^{n_y} v_j[h_j(y)] \left| \frac{\partial h_j(y)}{\partial y} \right| f(h_j(y)). \quad (10.28)$$

Уравнения (10.24), (10.26) и (10.28) являются основой для исследования систем со случайным квантованием.

§ 10.4. Уравнения вероятностных моментов систем с амплитудной модуляцией

Вероятностные моменты первого и второго порядков определяются из плотности вероятности $f(y, t)$ по формулам

$$m_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_i f(y, t) dy \quad (i = \overline{1, n_y}), \quad (10.29)$$

$$\theta_{ir}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i)(y_r - m_r) f(y, t) dy \quad (i, r = \overline{1, n_y}), \quad (10.30)$$

где $m_i(t)$ — математическое ожидание фазовой координаты $y_i(t)$, а $\theta_{ir}(t)$ — корреляционный момент (второй центральный момент) фазовых координат $y_i(t)$ и $y_r(t)$. При одинаковых индексах $r = i$ функция $\theta_{ii} = \theta_i$ является дисперсией фазовой координаты. Если ошибка управления входит в число фазовых координат, то уравнения для вероятностных моментов (10.29) и (10.30) достаточны для решения задач оценки точности управления в рамках корреляционной теории. В то же время имеются задачи, когда знание лишь первых двух вероятностных моментов бывает недостаточным для суждения о качестве работы системы и приходится определять моменты более высокого порядка. Определение конечного числа моментов позволяет аппроксимировать плотность вероятности $f(y, t)$ в виде ряда, коэффициенты которого зависят от вероятностных моментов.

Ограничимся рассмотрением уравнений лишь для первых двух вероятностных моментов (математических ожиданий и корреляционных моментов), поскольку, как уже говорилось, они широко используются для оценки точности, тем более что методика составления уравнений моментов более высокого порядка аналогична. Ввиду того что рассматриваемый метод является приближенным, имеются определенные особенности его использования при анализе систем различного вида, поэтому целесообразно методике анализа изучать отдельно для систем с амплитудной и частотной модуляциями. В настоящем параграфе рассматриваются системы с амплитудной модуляцией и пуассоновским характером квантования.

Системы со случайным пуассоновским квантованием и амплитудной модуляцией описываются уравнениями (10.4), а плотность

вероятности фазовых координат удовлетворяет уравнению

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) - \nu f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} \nu_j \left| \frac{\partial h_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| f(h_j(\mathbf{y})), \quad \nu = \sum_{j=1}^{n_y} \nu_j.$$

Перейдем к составлению уравнений для математических ожиданий, задаваемых соотношением (10.29). Для этого умножим обе части уравнения Колмогорова — Феллера на y_i и проинтегрируем их по всем составляющим вектора $\mathbf{y}$ в бесконечных пределах. С учетом того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_i \dot{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \dot{m}_i, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y_i \nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = - \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для математического ожидания m_i -й координаты в виде

$$\dot{m}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \nu m_i + \sum_{j=1}^{n_y} \nu_j \int_{-\infty}^{\infty} y_i \left| \frac{\partial h_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| f(h_j(\mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

где $\pi_i(\mathbf{y}, t)$ — составляющая вектора плотности потока вероятности, задаваемая формулой (10.9). Совокупность математических ожиданий всех фазовых координат образует вектор

$$\mathbf{m}(t) = [m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)]^T$$

размерности n_y .

Совокупность всех функций

$$m_{1i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (i = \overline{1, n_y}) \quad (10.31)$$

образует вектор $\mathbf{m}_1^*(t)$, а совокупность функций

$$m_{2ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_i \frac{\partial h_j(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} f(h_j(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \quad (i = \overline{1, n_y}) \quad (10.32)$$

образуют группу векторов $\mathbf{m}_{2j}^*(t)$ ($j = \overline{1, n_y}$). В итоге уравнения для математических ожиданий в векторной форме имеют вид

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1^* - \nu \mathbf{m} + \sum_{j=1}^{n_y} \nu \mathbf{m}_{2j}^*. \quad (10.33)$$

Найдем уравнения для корреляционных моментов, которые задаются формулой (10.30). С этой целью домножим обе части уравнения (10.24) на произведение $(y_i - m_i)(y_r - m_r)$ и проинтегрируем в бесконечных пределах. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i)(y_r - m_r) \dot{f}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \dot{\theta}_{ir}(t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i)(y_r - m_r) \nabla_{y^T} \pi(y, t) dy = \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i) \pi_r(y, t) dy - \int_{-\infty}^{\infty} (y_r - m_r) \pi_i(y, t) dy,$$

получаем следующую запись уравнений для корреляционных моментов:

$$\dot{\theta}_{ir} = \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i) \pi_r(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} (y_r - m_r) \pi_i(y) dy - v \theta_{ir} + \\ + \sum_{j=1}^n v_j \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i)(y_r - m_r) \left| \frac{\partial h_j(y)}{\partial y} \right| f(h_j(y)) dy \quad (i, r = \overline{1, n_y}).$$

Матрицу корреляционных моментов $\theta_{ir}(t)$ ($i, r = \overline{1, n_y}$) размера $n_y \times n_y$ обозначим буквой θ . Если дополнительно ввести матрицу θ_1^* с элементами

$$\theta_{1ir}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_i - m_i) \pi_r(y, t) dy + \int_{-\infty}^{\infty} (y_r - m_r) \pi_i(y, t) dy \\ (i, r = \overline{1, n_y}) \quad (10.34)$$

и группу $\theta_{2j}^* (j = \overline{1, n_y})$ с элементами

$$\theta_{2irj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i)(y_r - m_r) \left| \frac{\partial h_j(y)}{\partial y} \right| f(h_j(y)) dy \quad (i, r = \overline{1, n_y}), \\ (10.35)$$

то уравнения корреляционных моментов в матричной форме примут вид

$$\dot{\theta} = \theta_1^* - v \theta + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \theta_{2j}^*. \quad (10.36)$$

Решая дифференциальные уравнения (10.33) и (10.36) с заданными по смыслу задачи начальными условиями, можно найти математические ожидания и вторые корреляционные моменты фазовых координат, среди которых находятся математическое ожидание и дисперсия ошибки управления. Метод интегрирования уравнений моментов имеет приближенный характер вследствие того, что при нахождении функций (10.31), (10.32), (10.34) и (10.35) надо знать функцию плотности вероятности $f(y, t)$. А поскольку в процессе решения $f(y, t)$ остается неизвестной, ее приходится аппроксимировать, используя для этого приближенные зависимости, определяемые через значения вероятностных моментов. При анализе точности с учетом только

первых двух вероятностных моментов чаще всего используют гауссовскую аппроксимацию плотности вероятности. В то же время существуют задачи, когда уравнения моментов удается записать в замкнутом виде, не прибегая к аппроксимации функции плотности, и можно говорить о принципиальной возможности получения точного решения в рамках корреляционной теории. Задачи такого типа связаны с анализом линейных систем с амплитудной модуляцией.

§ 10.5. Уравнения систем с амплитудной модуляцией

Линейные системы со случайным квантованием и амплитудной модуляцией описываются уравнениями (10.6). Используем векторно-матричные обозначения для этих уравнений и совокупность регулярных воздействий $u_i(t)$ обозначим вектором

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n_y}(t)]^T.$$

Введем матрицу $\mathbf{A}(t)$ с элементами $a_{ij}(t)$ и группу матриц $\mathbf{B}_j(t)$ с элементами $b_{ikj}(t)$ ($i, k, j = \overline{1, n_y}$), после чего уравнения (10.6) можно записать в форме

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{y} - \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{B}_j \mathbf{y} v_j + \mathbf{F}\xi.$$

Для систем со случайным квантованием и линейной амплитудной модуляцией уравнение Колмогорова — Феллера определяется выражением (10.25)

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) - v f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} v_j |\mathbf{E}_j^{-1}| f(\mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{y}),$$

где матрица $\mathbf{E}_j = \mathbf{I} - \mathbf{B}_j$, а составляющие вектора плотности потока вероятности $\pi(\mathbf{y})$ согласно (10.9) равны

$$\begin{aligned} \pi_i(\mathbf{y}, t) = & \left[u_i(t) - \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}(t) f(\mathbf{y}, t) \right] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{p=1}^{n_y} \sum_{q=1}^{n_y} \varphi_{jp}(t) \varphi_{jq}(t) g_{pq}(t) \frac{\partial}{\partial y_j} f(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Чтобы записать уравнения для математических ожиданий, вначале вычислим интеграл (10.31):

$$\begin{aligned} m_{1i} = & \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = u_i \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} y_j f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{p=1}^{n_y} \sum_{q=1}^{n_y} \varphi_{jq} \varphi_{ip} g_{pq} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_i} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = u_i - \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij} m_j \quad (i = \overline{1, n_y}). \end{aligned} \quad (10.37)$$

В векторной форме это равенство имеет вид

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{m}.$$

Интегрируя соотношение (10.32), получаем еще одну функцию

$$m_{2ij}^* = \int_{-\infty}^{\infty} y_i |E_j^{-1}| f(E_j^{-1}y) dy = m_i - \sum_{k=1}^{n_y} b_{ikj} m_k,$$

которая в векторной форме записывается в виде

$$\mathbf{m}_{2j}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_j)\mathbf{m}. \quad (10.38)$$

Подставляя (10.37) и (10.38) в (10.33), получаем следующее уравнение для вектора математических ожиданий:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{m} - \sum_{j=1}^{n_y} v_j \mathbf{B}_j \mathbf{m} = \mathbf{u} - \left(\mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \mathbf{B}_j \right) \mathbf{m}. \quad (10.39)$$

В результате оказалось, что в линейной системе со случайным квантованием и амплитудной модуляцией уравнения для математических ожиданий линейны и автономны, так как не зависят от других вероятностных моментов.

Чтобы получить уравнения для вторых корреляционных моментов, вначале надо проинтегрировать (10.34) и (10.35). Для первого из них получаем выражение

$$\begin{aligned} \theta_{1ir}^* &= \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - m_i) \pi_r(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} (y_r - m_r) \pi_i(y) dy = \\ &= - \sum_{j=1}^{n_y} a_{rj} v_{ij} - \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij} \theta_{rj} + \sum_{p=1}^{n_y} \sum_{q=1}^{n_y} \varphi_{ip} \varphi_{rq} g_{pq}. \end{aligned}$$

Если все функции $\theta_{1ir}^*(t)$ ($i, r = 1, n_y$) представить матричной функцией θ_1^* , то

$$\theta_1^* = -\mathbf{A}\theta - \theta\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{F}^T. \quad (10.40)$$

Интегрируя уравнения для функций $\theta_{irj}(t)$ ($i, r, j = 1, n_y$), получаем в матричной форме равенство

$$\theta_{2j}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_j)(\mathbf{I} - \mathbf{B}_j)^T + (\mathbf{B}_j \mathbf{m})(\mathbf{B}_j \mathbf{m})^T. \quad (10.41)$$

Подставляя (10.40) и (10.41) в (10.36), получаем уравнение для корреляционных моментов

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= - \left(\mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \mathbf{B}_j \right) \theta - \theta \left(\mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \mathbf{B}_j \right)^T + \sum_{j=1}^{n_y} v_j \mathbf{B}_j^T + \\ &\quad + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{F}^T + \sum_{j=1}^{n_y} v_j (\mathbf{B}_j \mathbf{m})(\mathbf{B}_j \mathbf{m})^T. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Уравнение (10.42), как и (10.39) для математических ожиданий, линейное, в то же время оно имеет одну характерную

особенность — зависимость от функций математического ожидания тв. Таким образом, уравнение для корреляционных моментов (10.42) односторонне зависит от уравнения для математических ожиданий (10.39) и их приходится решать совместно. Наличие связи между уравнениями обусловлено тем, что квантование по времени является параметрическим случайным возмущающим воздействием, а поэтому даже при отсутствии внешних случайных воздействий выходной процесс будет содержать случайную составляющую за счет случайного квантования процессов внутри системы.

§ 10.6. Уравнения вероятностных моментов систем с частотной модуляцией

Перейдем к рассмотрению систем со случайным квантованием и частотной модуляцией, описываемых уравнениями (10.5)

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}\xi.$$

В этом уравнении, как и раньше, $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ — непрерывная нелинейная векторная функция фазовых координат и времени с компонентами $a_i(\mathbf{y}, t)$ ($i = \overline{1, n_y}$), $\mathbf{B}$ и $\mathbf{F}$ — матричные функции времени размера $n_y \times n_y$ с компонентами $b_{ij}(t)$ и $\varphi_{ij}(t)$.

Вектор дискретных процессов $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ имеет составляющие

$$v_j(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_{jk}) \quad (j = \overline{1, n_y}),$$

где моменты квантования t_{jk} образуют потоки случайных точек. Будем считать случайные потоки с различными индексами j пуассоновскими, статистически независимыми с интенсивностями $v_j(\mathbf{y}, t)$, зависящими от фазовых координат и времени. Зависимость интенсивностей v_j от фазовых координат является результатом частотной модуляции и служит источником информации для организации управления в системе.

Плотность вероятности фазовых координат систем со случайным квантованием и частотной модуляцией удовлетворяет уравнению (10.26):

$$\dot{f}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}^T \pi(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j) f(\mathbf{y} + \mathbf{b}_j),$$

где вектор $\mathbf{b}_j = [b_{1j}(t), b_{2j}(t), \dots, b_{n_y j}(t)]^T$ — столбец с индексом j матрицы $\mathbf{B}(t)$; $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n_y} v_j(\mathbf{y})$ — суммарная интенсивность квантования всех потоков.

Если можно было бы решить уравнение (10.26) с начальным условием $f_0(\mathbf{y})$ и найти функцию плотности вероятности $f(\mathbf{y}, t)$, то задача статистического анализа систем с частотной модуля-

цией была бы исчерпана. К сожалению, найти такое решение не удастся, поэтому приходится использовать приближенные методы анализа. Как и для систем с амплитудной модуляцией, воспользуемся методом интегрирования уравнений моментов.

Чтобы получить уравнение для вектора математических ожиданий, умножим обе части уравнения (10.26) на вектор $\mathbf{y}$ и проинтегрируем по всей бесконечной области изменения фазовых координат. После преобразований получим следующее уравнение для вектора математических ожиданий:

$$\dot{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} \pi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{b}_j \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (10.43)$$

Умножая обе части уравнения (10.26) на матрицу $(\mathbf{y} - \mathbf{m})(\mathbf{y} - \mathbf{m})^T$ и интегрируя, получаем матричное уравнение для корреляционных моментов

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & - \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{m})^T \pi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{m}) \pi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{b}_j (\mathbf{y} - \mathbf{m})^T v_j(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{j=1}^{n_y} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{m}) \mathbf{b}_j^T v_j(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j^T \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Уравнения вероятностных моментов (10.43) и (10.44) систем с частотной модуляцией оказываются сложнее аналогичных уравнений для систем с амплитудной модуляцией. Главная причина заключается в нелинейном характере частотной модуляции, что делает систему принципиально нелинейной. Даже в случае линейной непрерывной части уравнения вероятностных моментов остаются нелинейными за счет функциональной зависимости интенсивностей квантования $v_j(\mathbf{y})$ от фазовых координат. По физическому смыслу интенсивности квантования не могут быть отрицательными, поэтому линеаризация функций $v_j(\mathbf{y})$ может производиться лишь в ограниченной области изменения переменных $\mathbf{y}$. В результате статистический анализ систем со случайным квантованием и частотной модуляцией по уравнениям вероятностных моментов можно вести лишь приближенными способами, главными из которых являются различные методы линеаризации.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Задачи автоматизации сложных процессов, приводящие к при-
менению автоматических систем со случайной сменой структуры,
являются актуальными в современной технике. Эти же проблемы
возникают и в других областях человеческой деятельности, если
математически формализовать протекающие процессы в виде со-
ответствующих уравнений. Теоретической базой систем со слу-
чайной сменой структуры в настоящее время служит теория
разрывных марковских случайных процессов. Единственным огра-
ничением современной теории является марковость дискретного
процесса смены структуры. Дальнейшим развитием общей теории
является распространение ее на полумарковские и немарковские
процессы смены структуры и исследование общих закономерно-
стей преобразования вероятностных характеристик таких систем.

Важным направлением развития теории систем со случайной
сменой структуры является разработка приближенных методов
и алгоритмов исследования вероятностных характеристик, осно-
ванных на аппроксимации функций распределения, в частности
с помощью двух вероятностных моментов. Применение такой ап-
проксимации позволяет получить практически реализуемые алго-
ритмы анализа, однако нуждается в обосновании областей при-
менимости по точности.

Для практического использования изложенной общей теории
и получения рекомендаций по оценке реальных систем со слу-
чайной сменой структуры необходимы экспериментальные или
теоретические исследования по определению интенсивностей и
условий смены структур, т. е. процесса $s(t)$. Эти исследования
непосредственно связаны с рассмотрением конкретной физиче-
ской природы системы. Некоторые рекомендации по определению
этих характеристик приведены в 4-й и последующих главах, где
рассматривались конкретные примеры систем.

Важным направлением развития теории и автоматических си-
стем со случайной структурой является обоснование достаточно
точных алгоритмов их функционирования и построение имитаци-
онных моделей. Теория и практика построения автоматических
систем со случайной сменой структуры продолжают развиваться.
Теоретические основы современного анализа таких систем и изло-
жены в данной книге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Г. Т., Тюрин В. Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигналов по времени.— М.: Энергия, 1977.
2. Артемьев В. М. Статистический анализ систем с обратной переменной структурой // Проблемы повышения эффективности систем управления.— Минск: Минсвязи, 1971.
3. Артемьев В. М. Уравнения числовых характеристик закона распределения фазовых координат систем с необратимой переменной структурой // Проблемы повышения эффективности систем управления.— Минск: Минсвязи, 1971.
4. Артемьев В. М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры.— Минск: Высшая школа, 1979.
5. Артемьев В. М. Справочное пособие по методам исследования радиоэлектронных следящих систем.— Минск: Высшая школа, 1984.
6. Артемьев В. М., Ганз В. А., Степанов В. Л. Управление в системах с разделением времени.— Минск: Высшая школа, 1982.
7. Артемьев В. М., Ивановский А. В. Вероятностный анализ импульсных систем при случайном законе распределения интервалов квантования // Автоматика и вычислительная техника.— 1981.— Вып. 10.
8. Артемьев В. М., Ивановский А. В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования.— М.: Энергоатомиздат, 1986.
9. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М.: Наука, 1969.
10. Бергэн Ж., Риту М., Ружие Ж. Работа ЭВМ с разделением времени.— М.: Наука, 1972.
11. Большаков И. А. Анализ срыва слежения в системах автоматического регулирования под воздействием флуктуационной помехи // Автоматика и телемеханика.— 1959.— Т. XV, № 12.
12. Бухалев В. А. Анализ точности автоматических систем со случайной структурой, имеющей два возможных состояния // Автоматика и телемеханика.— 1975.— № 4.
13. Бухалев В. А. Анализ точности динамических систем со случайной структурой, описываемой условной марковской цепью // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1976.— № 2.
14. Вакин С. А., Шустов Л. Н. Основы радиопротиводействия и радиотехнической разведки.— М.: Советское радио, 1986.
15. Горелов Г. В. Нерегулярная дискретизация сигналов.— М.: Радио и связь, 1983.
16. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования.— М.: Физматгиз, 1963.
17. Дуб Дж. Вероятностные процессы.— М.: ИЛ, 1956.
18. Евланов Л. Г., Константинов В. М. Системы со случайными параметрами.— М.: Наука, 1976.
19. Емельянов С. В. Бинарные системы автоматического управления.— М.: ИСИ АН СССР, 1983—1984, вып. 1—5.
20. Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костылева Н. Е., Шубладзе А. М., Езеров В. Б., Дубровский Е. Н. Теория систем с переменной структурой.— М.: Наука, 1970.
21. Жилищев К. К. Приближенные методы расчета систем с переменной структурой.— М.: Энергия, 1974.

22. Жук К. Д., Тимченко А. А., Доленко Т. И. Исследование структур и моделирование логико-динамических систем.— Киев: Наукова думка, 1975.
23. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем // Автоматика и телемеханика.— 1956.— Т. XVII, № 5.
24. Казаков И. Е. Статистические методы проектирования систем управления.— М.: Машиностроение, 1969.
25. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний.— М.: Наука, 1975.
26. Казаков И. Е. Вероятностный анализ смены режима работы автоматической системы // Автоматика и телемеханика.— 1977.— № 1.
27. Казаков И. Е. Вероятностный анализ одного класса систем с переменной структурой // Автоматика и телемеханика.— 1977.— № 3.
28. Казаков И. Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой.— М.: Наука, 1977.
29. Казаков И. Е. Стохастические системы со случайной сменой структуры // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1989.— № 1.
30. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры.— М.: Наука, 1980.
31. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1962.
32. Казаков И. Е., Мальчиков С. В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний.— М.: Наука, 1983.
33. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: ИЛ, 1950.
34. Китаев М. Ю., Яшков С. Ф. Распределение условного времени гашения в системе с разделением времени обслуживания // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1978.— № 4.
35. Колмогоров А. Н. О статистических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук.— 1938.— Вып. 5.
36. Крамер П. Математические методы статистики.— М.: ИЛ, 1949.
37. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование.— М.: Наука, 1973.
38. Кринецкий Е. И. Системы самонаведения.— М.: Машиностроение, 1970.
39. Куклев Е. А. Вероятностный анализ многорежимной нестационарной динамической системы // Вопросы теории САУ. Вып. 5.— Л.: ЛГУ, 1980.
40. Лайнотис Д. Г. Разделение — единый метод построения адаптивных систем // ТИИЭР.— 1976.— Т. 64, № 8.
41. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Советское радио, 1968.
42. Ленинг Д. Х., Бетгин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления.— М.: ИЛ, 1958.
43. Максимов М. В., Горгонов Г. И. Радиоэлектронные системы самонаведения.— М.: Радио и связь, 1982.
44. Малышев В. В., Кибзун А. И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами.— М.: Машиностроение, 1987.
45. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию радиосвязи.— М.: Советское радио, 1962.
46. Мишулина О. А. Анализ линейных систем управления со случайным скачкообразным изменением параметров // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1968.— № 3.
47. Мишулина О. А. Исследование точности линейных систем автоматического управления со случайными изменениями структуры // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1970.— № 1.
48. Обрезков Т. В., Резевиц В. Д. Метод оценки срыва слежения.— М.: Советское радио, 1972.
49. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления.— М.: Мир, 1973.
50. Пакиши П. В. Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика.— 1983.— № 6.

51. Пугачев В. С. Применение теории марковских процессов к анализу точности автоматических систем // Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика.— 1961.— № 3.
52. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: Физматгиз, 1962.
53. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем.— М.: Машиностроение, 1974.
54. Пугачев В. С., Силицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы.— М.: Наука, 1990.
55. Репин В. Г. Анализ одного класса систем со случайно изменяющимися параметрами // Автоматика и телемеханика.— 1970.— № 6.
56. Системы с разделением времени/Под ред. К. Кариллуса.— М.: Мир, 1979.
57. Скляревич А. Н. Введение в статистическую динамику систем с возможными нарушениями.— Рига: Знание, 1973.
58. Скляревич А. Н., Скляревич Ф. К. Линейные системы с возможным изменением.— Рига: Знание, 1985.
59. Скляревич А. Н., Скляревич Ф. К. Вероятностные модели объектов с возможными изменениями.— Рига: Знание, 1989.
60. Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло.— М.: Наука, 1973.
61. Стратонович Р. Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестник МГУ. Серия математики и механики.— 1964.— Т. 23, № 3.
62. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления.— М.: МГУ, 1966.
63. Суордер Д. Д. Управление системами при резких изменениях условий // ТИИЭР.— 1976.— Т. 64, № 8.
64. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.— М.: Советское радио, 1966.
65. Тихонов В. И. Достижение границ марковским процессом // Изв. АН СССР. Радиоэлектроника.— 1972.— Т. 15, № 4.
66. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М.: Советское радио, 1977.
67. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления.— М.: Машиностроение, 1964.
68. Федосов Е. А., Инсаров В. В., Селивохин С. С. Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды.— М.: Наука, 1989.
69. Феллер В. К теории стохастических процессов // Успехи математических наук.— 1938.— Вып. 5.
70. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1963.
71. Baken G. A., Budle J. M. The effect of random-sampling interval on a sampling-data models of the human operator. 3rd Annual NASA-University Conference of Manual Control.— Los Angeles, 1967.
72. Bukhalev V. A. The analysis of the accuracy of dynamic systems changing their structure in the random time moment // Problem of Control and Information Theory.— 1975.— V. 4(3).
73. Fortet R. Les fonctions aleatoires du type de Marcoff // J. Math. Appl.— 1938.— V. 22.
74. Ito K. Stochastic integral // Proc. Imp. Acad.— Tokyo.— 1944.— V. 20.
75. Melsa J., Dannenberg K. Stability analysis of randomly digital control systems // Automatica.— London.— 1975.— V. 11.
76. Pawula R. F. Generalisation and extension of the Fokker — Plank — Kolmogorov equations // IEEE Transactions of Information Theory.— 1967.— V. IT-3, No. 3.
77. Robinson V. G., Swarder D. D. A computational algorithm for design of regulator for linear jump parameter systems // IEEE Trans.— 1974.— AG-19, No. 1.
78. Swarder D. D. Bayes controllers with memor for a linear system with jump parameters // IEEE Trans.— 1978.— AES-14, No. 3.

ANALYSIS OF SYSTEMS WITH RANDOM STRUCTURE

by *I. YE. KAZAKOV, V. M. ARTEMIEV, V. A. BUKHALEV*

Ed. *IGOR YE. KAZAKOV*

Fizmatlit Publishing Company, Nauka Publishers, Moscow, 1994

Readership: Specialists in the theory of automatic control, students studying the systems of automatic control.

Summary: This book contains a fundamental and mathematically rigorous presentation of statistical analysis of automatic systems with a sudden random changed structure. This class of mathematical models provides an adequate and efficient description of random jump processes arising in complex multiregime electromechanic and radioelectronic devices. It enables us to describe a flight of aircrafts and other moving objects in an atmosphere with sharply changed properties or with device failures. And finally, these models can be effectively used for the description of various physical, chemical, biological and other phenomena with a random sudden change of properties.

The mathematical models of systems possessing a finite number of determined structures with stepwise transitions occurring at random moments of time are considered and the properties of Markovian intermittent stochastic processes are formulated. To determine the probabilistic characteristics of the processes in these systems, the fundamental generalized Focker — Planck — Kolmogorov and Pugachev equations are introduced. Approximate methods of analysis based on the integration of equations for the probabilistic moments and structure probabilities are developed.

Some concrete examples of systems with random structure are considered.

The book may serve as a fundamental introduction to the statistical theory of systems with random structure. The presentation is based on the original results of the authors and contains a systematical description of all the modern achievements in the field of interest.

Contents: Definitions, classification and mathematical models of a system with randomly changed structure. Fields of application.

Markovian intermittent stochastic processes in these systems and their characteristics. Discrete structure changing Markovian process, its properties and parameters. Probabilistic characteristics of the processes in the systems with a distributed and a point-like jump change of structure. Absorption and reconstruction functions. Generalized Focker — Planck — Kolmogorov and Pugachev equations for the joint probability densities of phase coordinates and structure. Generalized Pugachev equations for the characteristic functions of phase coordinates and structure. Equations for the probabilistic moments and the structure probabilities.

Approximate methods of the probabilistic analysis of systems based on two-moment parametrization approximation of probability density functions and statistical linearization. Analysis of dynamical systems in case of Markovian random jump perturbation. Markovian systems with a distributed independent change of structure. Systems with conditional Markovian change of structure. Markovian systems with a point-like jump change of structure. Systems with a separated time control. Systems with random period of quantization.

The authors: I. Ye. Kazakov and V. A. Bukhalev (Moscow Aviation Academy) and V. M. Artemiev (Institute for Applied Physics, Minsk) are leading authorities in automatic control and are authors of a series of papers and monographs on statistical dynamics of systems with a random structure.

УВАЖАЕМЫЕ ГОСПОДА!

Настоящая монография авторов
КАЗАКОВА И. Е., АРТЕМЬЕВА В. М.,
БУХАЛЕВА В. А.

гармонично сочетает фундаментальную теорию
систем случайной структуры
с подробно изложенными примерами
ее практического применения.

Нам представляется перспективным использование
данной теории в области обработки информации в
средствах связи.

Нашей организацией в этом направлении уже се-
годня ведутся исследования и получены интересные
результаты.

Приглашаем заинтересованных лиц, как физиче-
ских, так и юридических, как российских, так и ино-
странных, к совместной работе.

ТОО «ТАНАИС»

ОБЕСПЕЧИТ НАДЕЖНОЙ СВЯЗЬЮ, СИГНАЛИЗАЦИЕЙ
И СРЕДСТВАМИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ
ВАШИ ОФИСЫ,
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ПОМЕЩЕНИЯ, СКЛАДЫ,
КВАРТИРЫ И ПРИУСАДЕБНЫЕ ХОЗЯЙСТВА!

Адрес: 125167 Москва, а/я 47,
ул. Красноармейская, д. 2-в
тел. (095) 155-16-04,
(095) 155-11-51
факс. (095) 212-21-61

